МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2022-2-119-126

Сингулярно возмущенные интегральные уравнения с быстро осциллирующими неоднородностями

М.А. Бободжанова, В.Ф. Сафонов, Ю.В. Фомина

Рассмотрены сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения с быстро осциллирующей правой частью. Основная цель работы заключается в обобщении метода регуляризации Ломова и выявлении влияния быстро осциллирующей правой части на асимптотику решения исходной задачи при наличии интегрального оператора. Различные прикладные задачи, связанные со свойствами сред с периодической структурой, ведут к необходимости изучения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими неоднородностями. Уравнения данной типа часто встречаются в приложениях, например, в электрических системах под воздействием высокочастотных внешних сил. Наличие подобных сил создает серьезные проблемы для численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому к таким уравнениям обычно применяют асимптотические методы, наиболее известные из которых метод регуляризации Ломова и метод расщепления Фещенко–Шкиля–Николенко. Метод расщепления особенно эффективен в применении к уравнениям с быстро осциллирующей неоднородностью, а в случае неоднородности, содержащей как быстрые, так и медленные компоненты, наиболее результативен метод регуляризации Ломова. Оба метода разработаны, в основном, для сингулярно возмущенных уравнений, не содержащих интегральный оператор. Переход от дифференциальных к интегро-дифференциальным уравнениям требует существенной перестройки алгоритма метода регуляризации. Интегральный член порождает новые типы особенностей в решениях, отличающихся от ранее известных, что затрудняет разработку алгоритма метода регуляризации.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные и интегро-дифференциальные уравнения, быстро осциллирующие неоднородности, регуляризация интеграла.

Для цитирования: Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф., Фомина Ю.В. Сингулярно возмущенные интегральные уравнения с быстро осциллирующими неоднородностями // Вестник МЭИ. 2022. № 2. С. 119—126. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-2-119-126.

Singularly Perturbed Integral Equations with Rapidly Oscillating Inhomogeneities

M.A. Bobodzhanova, V.F. Safonov, Yu.V. Fomina

Singularly perturbed integro-differential equations with a rapidly oscillating right-hand side are considered. The main goal of this work is to generalize the Lomov regularization method and to reveal the influence of the rapidly oscillating right-hand side on the asymptotics of the solution to the original problem in the presence of an integral operator. Various applied problems related to the properties of media with a periodic structure lead to the need to study differential equations with rapidly oscillating inhomogeneities. Equations of this type are often found in applications such as electrical systems under the influence of high frequency external forces. The presence of such forces creates serious problems for the numerical integration of the corresponding differential equations. Therefore, asymptotic methods are usually applied to such equations, the most well-known of which are the Lomov regularization method and the Feshchenko–Shkil–Nikolenko splitting method. The splitting method is especially effective when applied to equations with a rapidly oscillating inhomogeneity, and in the case of an inhomogeneity containing both fast and slow components, the Lomov regularization method turned out to be the most effective. However, both of these methods were developed mainly for singularly perturbed equations that do not contain an integral operator. The transition from differential equations to integro-differential equations requires a significant restructuring of the regularization method's algorithm. The integral term generates new types of singularities in solutions that differ from the previously known ones, which complicates the development of an algorithm for the regularization method.

Key words: wsingularly perturbed and integro-differential equations, rapidly oscillating inhomogeneities, regularization of the integral.

For citation: Bobodzhanova M.A., Safonov V.F., Fomina Yu.V. Singularly Perturbed Integral Equations with Rapidly Oscillating Inhomogeneities. Bulletin of MPEI. 2022;2:119—126. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2022-2-119-126.

Постановка задачи и сведение уравнения (1) к интегро-дифференциальной задаче

Рассмотрим сингулярно возмущенное интегральное уравнение

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y - \int_0^t K(t,s)\,y(s,\varepsilon)\,ds = h_1(t) + \varepsilon h_2(t)\,e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $h_1(t)$, $h_2(t)$, $K(t, s)$, $\beta(t)$ — известные функции; $y(t)$ — неизвестная функция.

При развитии алгоритма построения асимптотического решения задачи (1) важную роль в решении данного уравнения играют существенно особые сингулярности. Для их описания продифференцируем (1) по t:

$$\begin{gathered} L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y' - K(t,t)\,y - \int_0^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} y(s,\varepsilon)\,ds = h_1'(t) + \\ +\varepsilon h_2'(t)\,e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}} + i\beta'(t)h_2(t)\,e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}; \\ y(0,\varepsilon) = \frac{h_1(0)}{\varepsilon} + h_2(0)\,e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим $\lambda_1(t) \equiv K(t,t)$; $G(t,s) \equiv \dfrac{\partial K(t,s)}{\partial t}$, а частоту быстро осциллирующей неоднородности — через $\beta'(t)$, тогда задачу (2) перепишем в следующем виде:

$$\begin{gathered} L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y' - \lambda_1(t)\,y - \int_0^t G(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds = h_1'(t) + \\ +\varepsilon h_2'(t)\,e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}} + i\beta'(t)h_2(t)\,e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}; \\ y(0,\varepsilon) = \frac{h_1(0)}{\varepsilon} + h_2(0)\,e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}, \quad t\in[0,T]. \end{gathered} \tag{3}$$

Если $y = y(t, \varepsilon)$ — решение задачи (3), то оно же является и решением уравнения (1), и обратно, поэтому вместо уравнения (1) изучим задачу (3).

Исследования сингулярно возмущенных задач типа (3) для интегро-дифференциального уравнения с быстро осциллирующей неоднородностью ранее не проводились, рассматривались лишь дифференциальные уравнения (без интегрального члена) такого типа. Для построения их асимптотических решений применяли методы регуляризации [1 — 3] и расщепления [4 — 6]. Описывали также сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения [7 — 11]. Однако в них быстро осциллирующими были коэффициенты при неизвестной функции, тогда как неоднородности медленно изменялись (т.е. не содержали быстро осциллирующих составляющих), поэтому обобщение методики работ [7 — 11] на задачи типа (1) не является очевидным и требует переосмысления и существенного дополнения.

Функцию $\lambda_2(t) = +i\beta'(_t)$ назовем спектром быстро осциллирующей неоднородности, а совокупность функций $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$ — спектром задачи (1).

Задачу (3) рассмотрим при следующих предположениях:

1) $\beta(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}^1)$, $K(t, s) \in C^\infty(0 \le s \le \le t \le T], \mathbb{R}^1)$;

2) $\lambda_1(t) \equiv K(t,t) < 0, \beta'(t) > 0,\ \forall t \in [0,T]$.

Перейдем к разработке алгоритма, позволяющего строить регуляризованные [1, 2] асимптотические решения интегро-дифференциальной задачи (3), а значит, и исходного уравнения (1).

Регуляризация задачи (3), построение расширенной системы

Введем регуляризирующие переменные

$$\tau_i = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_i(s)\,ds \equiv \frac{\psi_i(t)}{\varepsilon},\ i = 1,2$$

по спектру $\{\lambda_j(t)\}$ и вместо задачи (3) проанализируем следующую задачу для функции $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$ большего числа переменных:

$$\begin{gathered} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t} + \sum\nolimits_{j=1}^2 \lambda_j(t)\ \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j} - \\ -\lambda_1(t)\,\tilde{y} - \int_0^t G(t,\ s)\tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)ds = \\ = h_1'(t) + \varepsilon h_2'(t)\,e^{\tau_2} + i\beta'(t)h_2(t)\,e^{\tau_2}; \\ \tilde{y}(0,0,\varepsilon) = \frac{h_1(0)}{\varepsilon} + h_2(0), \end{gathered} \tag{4}$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2)$; $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, причем τ_1, τ_2 наряду с t являются независимыми переменными.

Если $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$ — решение задачи (4), то вектор-функция $y = \tilde{y}(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)$ является точным решением задачи (3), поэтому задача (4) расширена по отношению к задаче (3). Однако ее нельзя считать полностью регуляризованной, поскольку в ней не проведена регуляризация интегрального члена

$$J(\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=s,\tau=\psi(s)/\varepsilon}) = \int_0^t G(t,s)\tilde{y}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds.$$

Для регуляризации интегрального оператора следует ввести класс M_ε, асимптотически инвариантный относительно оператора J [1, с. 62]. В качестве класса M_ε возьмем класс $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$, где U — пространство функций $y(t, \tau)$, представимых суммами

$$y(t,\tau) = y_0(t) + \sum_{j=1}^{2} y_i(t)e^{\tau_i};$$
$$y_j(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1),\ j=\overline{0,2}. \tag{5}$$

Покажем, что класс $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ асимптотически инвариантен относительно оператора J. Образ оператора J на элементе (5) пространства U имеет вид:

$$J(y(t,\ \tau)|_{t=s,\tau=\psi(s)/\varepsilon}) = \int_0^t G(t,s)\,y\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon}\right)ds =$$
$$= \int_0^t G(t,s)\,y_0(s)\,ds + \sum_{j=1}^{2}\int_0^t G(t,s)\,y_j(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta}.$$

Применив операцию интегрирования по частям, получим следующее разложение:

$$J_j(t,\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1}\left[\begin{array}{l}\left(I_j^\nu\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} - \\ -\left(I_j^\nu\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=0}\end{array}\right],$$

где $I_j^0 = \dfrac{1}{\lambda_j(s)}$; $I_j^\nu = \dfrac{1}{\lambda_j(s)}\dfrac{\partial}{\partial s}I_j^{\nu-1}\ (\nu \geq 1, j = 1,2)$.

Образ оператора J на элементе (5) пространства U представим в виде ряда

$$J\left(y(t,\tau)|_{t=s,\tau=\psi(s)/\varepsilon}\right) = \int_0^t G(t,s)\,y_0(s)\,ds +$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_j^\nu\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(\lambda_j(\theta))d\theta} - \right.$$
$$\left. -\left(I_j^\nu\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=0}\right].$$

Нетрудно показать [11, с. 291—294], что данный ряд сходится асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $t \in [0, T]$). Это означает, что класс M_ε асимптотически инвариантен (при $\varepsilon \to +0$) относительно оператора J.

Обозначим через R_ν операторы $R_\nu: U \to U$, действующие на каждый элемент $y(t, \tau) \in U$ вида (5) по закону

$$R_0 y(t,\tau) = \int_0^t G(t,\ s)\,y_0(s)\,ds; \tag{6_0}$$

$$R_1 y(t,\tau) = \sum_{j=1}^{2}\left[\begin{array}{l}\left(I_j^0\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=t} e^{\tau_j} - \\ -\left(I_j^0\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=0}\end{array}\right]; \tag{6_1}$$

$$R_{\nu+1} y(t,\tau) = \sum_{j=1}^{2}(-1)^\nu\left[\left(I_j^\nu\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=t} e^{\tau_j} - \right.$$
$$\left. -\left(I_j^\nu\left(G(t,s)\,y_j(s)\right)\right)_{s=0}\right]. \tag{$6_{\nu+1}$}$$

Операторы $R_\nu : U \to U$ называют операторами порядка по той причине, что они в выражении $Jy(t, \tau, \sigma)$ выделяют сумму членов порядка ν относительно параметра ε.

Пусть $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$ — произвольная непрерывная по $(t, \tau) \in [0, T]\{\tau{:}\mathrm{Re}\tau_j \leq 0, j = 1, 2\}$ функция, имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau),\ y_k(t,\tau) \in U, \tag{7}$$

сходящееся при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t, \tau) \in [0, T] \times \{\tau{:}\mathrm{Re}\tau_j \leq 0, j = 1, 2\}$), тогда образ $J\tilde{y}$ данной функции разлагается в асимптотический ряд

$$J\left(\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\right) = \sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k J\left(y_k(t,\tau)\Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\right) =$$
$$= \sum_{r=-1}^{\infty}\varepsilon^r \sum_{s=-1,r-s\geq 0}^{r} R_{r-s}\,y_s(t,\tau)\Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}.$$

Это равенство является основанием для введения расширения оператора J на рядах вида (7):

$$\tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \tilde{J}\left(\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\right) \triangleq \sum_{r=-1}^{\infty}\varepsilon^r \sum_{s=-1,r-s\geq 0}^{r} R_{r-s}\,y_s(t,\tau).$$

Хотя оператор $\tilde{J}$ определен формально, его полезность очевидна, т. к. на практике обычно строят N-е приближение асимптотического решения уравнения (3), в котором участвуют лишь N-е частичные суммы ряда (7), обладающие не формальным, а истинным смыслом. Запишем задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходному уравнению (2):

$$L_\varepsilon\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j} -$$
$$-\lambda_1(t)\,\tilde{y} - \tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = h_1'(t) + \varepsilon h_2'(t)e^{\tau_2} + \tag{8}$$
$$+i\beta'(t)\,h_2(t)e^{\tau_2},\ \ y(0,0,\varepsilon) = \frac{h_1(0)}{\varepsilon} + h_2(0).$$

Итерационные задачи и их разрешимость в пространстве *U*. Теорема об оценке остаточного члена

Определим решение задачи (8) в виде ряда (7). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε (с учетом формул (6_0), (6_1), ..., (6_ν)), получим следующие итерационные задачи:

$$L_0 y_{-1}(t,\tau) \equiv \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(t) \frac{\partial y_{-1}}{\partial \tau_i} - \lambda_1(t) y_{-1} - \\ -\int_0^t G(t,s) y_0^{(-1)}(s)\,ds = 0, \quad y_{-1}(0,0) = h_1(0); \tag{9_{-1}}$$

$$L_0 y_0(t,\tau) = -\frac{\partial y_{-1}}{\partial t} + R_1 y_{-1} + h_1'(t) + i\beta'(t) h_2(t) e^{\tau_2}, \\ y(0,0) = h_2(0) e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}; \tag{9_0}$$

$$L_0 y_1(t,\tau) = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + R_1 y_0 + R_2 y_{-1}, \quad y_1(0,0) = 0; \tag{9_1}$$

$$L_0 y_k(t,\tau) = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + R_1 y_{k-1} + \ldots + R_{k+1} y_{-1}, \\ y_k(0,0) = 0,\ k \ge 0. \tag{9_k}$$

Каждая из итерационных задач (9_k) имеет вид:

$$L_0 y(t,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_j} - \lambda_1(t) y - \int_0^t G(t,s) y_0(s)\,ds = \\ = H(t,\tau), \quad y(0,0) = y_*, \tag{10}$$

где y_* — известное число; $H(t,\tau)$ — известная функция класса U, элементами которого являются суммы

$$H(t,\tau) = H_0(t) + \sum_{j=1}^{2} H_j(t) e^{\tau_j}; \\ H_j(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^1\right),\ j = \overline{0,2}. \tag{5a}$$

Введем скалярное (при каждом $t \in [t_0, T]$) произведение в пространстве U:

$$< z, w > \equiv < z_0(t) + \sum_{j=1}^{2} z_j(t) e^{\tau_j}, w_0(t) + \sum_{j=1}^{2} w_j(t) e^{\tau_j} > \triangleq \\ \triangleq z_0(t)\overline{w_0(t)} + \sum_{j=1}^{2} z_j(t)\overline{w_j(t)},$$

где черта над функцией $w(t)$ означает комплексное сопряжение в $\mathbb{C}^1$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1) и 2), и правая часть* $H(t,\tau) = H_0(t) + \sum_{j=1}^{2} H_j(t) e^{\tau_j}$ *уравнения (10) принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости уравнения (10) в U необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество*

$$< H(t,\tau), e^{\tau_1} > \equiv 0, \forall t \in [0,T]. \tag{11}$$

Доказательство. Определим решение уравнения (10) в виде элемента (5) пространства U:

$$z(t,\tau) = z_0(t) + \sum_{j=1}^{2} z_j(t) e^{\tau_j}. \tag{12}$$

Подставив (12) в (10), получим

$$\sum_{j=1}^{2} \left[\lambda_j(t) - \lambda_1(t)\right] z_i(t) e^{\tau_i} - \lambda_1(t) z_0(t) - \\ -\int_0^t G(t,s) z_0(s)\,ds = H_0(t) + \sum_{j=1}^{2} H_j(t) e^{\tau_j}. \tag{13}$$

Приравняв отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, выведем следующие уравнения:

$$-\lambda_1(t) z_0(t) - \int_0^t G(t,s) z_0(s)\,ds = H_0(t); \tag{14}$$

$$\left[\lambda_j(t) - \lambda_1(t)\right] z_j(t) = H_j(t),\ j = 1,2. \tag{14_j}$$

Поскольку функция $\lambda_1(t) < 0 (\forall t \in [t_0, T])$, то уравнение (14) будет выглядеть следующим образом:

$$z_0(t) = \int_0^t (-\lambda_1^{-1}(t) G(t,s)) z_0(s)\,ds - \lambda_1^{-1}(t) H_0(t). \tag{15_0}$$

В силу гладкости ядра $-\lambda_1^{-1}(t)K(t, s)$ и неоднородности $-\lambda_1^{-1}(t)H_0(t)$ данное интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное решение $z_0(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$. У уравнения (14_2) также только одно единственное решение:

$$z_2(t) = \left[\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\right]^{-1} H_2(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^1\right),$$

так как $\lambda_2(t)$ не совпадает с $\lambda_1(t)$ при всех $t \in [0, T]$. Уравнение (14_1) разрешимо в пространстве $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ тогда и только тогда, когда имеет место тождество

$$H_1(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \langle H_1(t), e^{\tau_1} \rangle \equiv 0\ \forall t \in [0,T].$$

Таким образом, условие (11) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (10) в пространстве U. Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполнено тождество (11), то при условиях 1) и 2) уравнение (10) имеет следующее решение в пространстве U:

$$z(t,\tau) = z_0(t) + \alpha_1(t) e^{\tau_1} + \frac{H_2(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} e^{\tau_2}, \tag{16}$$

где $\alpha_1(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция; $z_0(t)$ — решение интегрального уравнения (15_0).

Не будем формулировать теорему об однозначной разрешимости задачи (10). Покажем, что применение теоремы 1 к двум последовательным итерационным задачам (9_k) и (9_{k+1}) позволяет определить решение первой из них однозначно в классе U.

Начнем с первой итерационной задачи (9_{-1}). Ее правая часть $H(t,\tau)=H^{(-1)}(t,\tau)\equiv 0$ удовлетворяет условию разрешимости (11), поэтому уравнение (9_{-1}) имеет решение в пространстве U в виде функции (см. (16))

$$y_{-1}(t,\tau)=y_0^{(-1)}(t)+\alpha_1^{(-1)}(t)\mathrm{e}^{\tau_1},$$

где функция $y_0^{(-1)}(t)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$y_0^{(-1)}(t)=\int_0^t\left(-\lambda_1^{-1}(t)G(t,s)\right)y_0^{(-1)}(s)\,ds$$

с единственным нулевым решением $y_0^{(-1)}(t)\equiv 0$. Значит, $y_{-1}(t,\tau)=\alpha_1^{(-1)}(t)\mathrm{e}^{\tau_1}$, где $\alpha_1^{(-1)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — пока произвольная функция. Подчинив ее начальному условию $y_{-1}(0,0)=h_1(0)$, найдем значение $\alpha_1^{(-1)}(0)=h_1(0)$. Для окончательного вычисления функции $\alpha_1^{(-1)}(t)$ перейдем к следующей итерационной задаче:

$$\begin{gathered}L_0y_0=-\frac{\partial y_{-1}}{\partial t}+R_1y_{-1}+h_1'(t)+i\beta'(t)h_2(t)\mathrm{e}^{\tau_2};\\ y_0(0,0)=h_2(0)\mathrm{e}^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}\end{gathered}\tag{17}$$

Учитывая вид (6_1) оператора R_1, запишем правую часть задачи (17):

$$\begin{aligned}&H(t,\tau)=H^{(0)}(t,\tau)\equiv-\dot\alpha_1^{(-1)}(t)\mathrm{e}^{\tau_1}+\\ &+R_1\left(\alpha_1^{(-1)}(t)\mathrm{e}^{\tau_1}\right)+h_1'(t)+i\beta'(t)h_2(t)e^{\tau_2}=\\ &=-\dot\alpha_1^{(-1)}(t)\mathrm{e}^{\tau_1}+\frac{G(t,t)\alpha_1^{(-1)}(t)}{\lambda_1(t)}\mathrm{e}^{\tau_1}-\\ &-\frac{G(t,0)\alpha_1^{(-1)}(0)}{\lambda_1(0)}+h_1'(t)+i\beta'(t)h_2(t)\mathrm{e}^{\tau_2}.\end{aligned}$$

Условие разрешимости (11) данного уравнения в пространстве U ведет к дифференциальному уравнению $-\dot\alpha_1^{(-1)}(t)+\dfrac{G(t,t)}{\lambda_1(t)}\alpha_1^{(-1)}(t)=0$. Подчинив его начальному условию $\alpha_1^{(-1)}(0)=h_1(0)$, найдем однозначно функцию $\alpha_1^{(-1)}(t)=h_1(0)\mathrm{e}^{\int_0^t\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}}$, а значит, получим решение

$$y_{-1}(t,\tau)=h_1(0)\mathrm{e}^{\int_0^t\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}+\tau_1}\tag{18}$$

задачи (9_{-1}) в пространстве U единственным образом. При этом задача (9_0) примет вид:

$$\begin{gathered}L_0y_0=-\frac{G(t,0)h_1(0)}{\lambda_1(0)}+h_1'(t)+i\beta'(t)h_2(t)\mathrm{e}^{\tau_2};\\ y_0(0,0)=h_2(0)\mathrm{e}^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}.\end{gathered}$$

По теореме 1 (см. (16)) она имеет следующее решение в пространстве U:

$$y_0(t,\tau)=y_0^{(0)}(t)+\alpha_1^{(0)}(t)\mathrm{e}^{\tau_1}+\frac{i\beta'(t)h_2(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\mathrm{e}^{\tau_2},\tag{19}$$

где $\alpha_1^{(0)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — произвольная функция; $y_0^{(0)}(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned}y_0^{(0)}(t)=&\int_0^t\left(-\frac{G(t,s)}{\lambda_1(t)}\right)y_0^{(0)}(s)\,ds-\\ &-\frac{1}{\lambda_1(t)}\left(-\frac{G(t,0)h_1(0)}{\lambda_1(0)}+h_1'(t)\right).\end{aligned}\tag{20}$$

Подчинив решение (19) начальному условию $y_0(0,0)=h_2(0)\mathrm{e}^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}$, установим начальное значение

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(0)}(0)=&\frac{1}{\lambda_1(0)}\left(\frac{G(0,0)h_1(0)}{\lambda_1(0)}+h_1'(0)\right)-\\ &-\frac{i\beta'(0)h_2(0)}{\lambda_2(0)-\lambda_1(0)}+h_2(0)\mathrm{e}^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}\equiv\alpha_1^0.\end{aligned}$$

Для полного вычисления функции $\alpha_1^{(0)}(t)$ перейдем к следующей итерационной задаче (9_1) и запишем для нее условия разрешимости (11). Они приведут к неоднородному дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered}-\dot\alpha_1^{(0)}(t)+\frac{G(t,t)}{\lambda_1(t)}\alpha_1^{(0)}(t)=l(t),\ \alpha_1^{(0)}(0)=\alpha_1^0;\\ l(t)=\frac{1}{\lambda_1(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G(t,s)}{\lambda_1(s)}h_1(0)\mathrm{e}^{\int_0^s\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}}\right)\right)_{s=t}.\end{gathered}\tag{20a}$$

Этому уравнению удовлетворяет единственная функция $\alpha_1^{(0)}(t)$:

$$\alpha_1^{(0)}(t)=\alpha_1^0\mathrm{e}^{\int_0^t\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}}+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_t^s\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}}l(s)ds,$$

поэтому решение (19) задачи (9_0) в пространстве U — однозначно.

Аналогично, применив теорему 1 к серии следующих итерационных задач (9_k), найдем однозначно их решения в пространстве U и построим ряд (7) с коэффициентами $y_k(t,\tau)$, $k=-1,0,1,\ldots,$ удовлетворяющими итерационным задачам (9_k). Обозначим через $y_{\varepsilon N}(t)$ сужение N-й частичной суммы ряда (7) при $\tau=\dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Также, как в [11], докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть для уравнения (3) выполнены условия 1) — 2). Тогда при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *(*$\varepsilon_0>0$ *— достаточно мало) частичная сумма* $y_{\varepsilon N}(t)$ *удовлетворяет задаче (3) с точностью до* $O(\varepsilon^{N+1})(\varepsilon\to+0)$, *т.е.*

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon N}(t)}{dt}-K(t,t)y_{\varepsilon N}(t)-$$
$$-\int_0^t\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}y_{\varepsilon N}(s)ds-h_1'(t)- \tag{20b}$$
$$-\varepsilon h_2'(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}-i\beta'(t)h_2(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}\equiv\varepsilon^{N+1}P(t,\varepsilon);$$
$$y_{\varepsilon N}(0)=\frac{h_1(0)}{\varepsilon}+h_2(0)e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}},\quad t\in[0,T],$$

где $\left\|P(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le\overline{P}$; постоянная $\overline{P}>0$ не зависит от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Перепишем тождество (20*b*)

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon N}(t)}{dt}-\frac{d}{dt}\int_0^t K(t,s)y_{\varepsilon N}(s)ds-$$
$$-h_1'(t)-\varepsilon\left(h_2(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}\right)'\equiv\varepsilon^{N+1}P(t,\varepsilon)$$

и проинтегрируем его по t, учитывая начальное условие $y_{\varepsilon N}(0)$. Получим

$$\varepsilon y_{\varepsilon N}(t)-\int_0^t K(t,s)y_{\varepsilon N}(s)ds-h_1(t)-$$
$$-\varepsilon h_2(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}\equiv\varepsilon^{N+1}\int_0^t P(s,\varepsilon)ds.$$

Поскольку

$$\left\|\int_0^t P(s,\varepsilon)ds\right\|_{C[0,T]}\le T\cdot\left\|P(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le\overline{P}_1=\text{const},$$

то функция $y_{\varepsilon N}(0)$ также удовлетворяет уравнению (1) с точностью до $O(\varepsilon^{N+1})(\varepsilon\to+0)$.

Для оценки нормы разности $y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)$ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varepsilon z(t,\varepsilon)-\int_0^t K(t,s)z(s,\varepsilon)ds=\int_0^t\Phi(s,\varepsilon)ds. \tag{21}$$

Дифференцируя его по t, получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt}-A(t)z-\int_0^t G(t,s)z(s,\varepsilon)=\Phi(t,\varepsilon),\ z(0,\varepsilon)=0,$$

где $A(t)\equiv K(t,t)=\lambda_1(t),G(t,s)=\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial t}$.

Данное уравнение описано в [11, с. 304], и показано, что при условиях 1), 2) оно корректно разрешимо в пространстве $C^1([0,T],\mathbb{C}^1)$ при любой правой части $\Phi(t,\varepsilon)\in C([0,T],\mathbb{C}^1)$, и имеет место оценка

$$\left\|z(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le\frac{\nu}{\varepsilon}\left\|\Phi(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}, \tag{22}$$

где постоянная $\nu>0$ не зависит от $\varepsilon>0$.

Разность $\Delta(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon\Delta(t,\varepsilon)-\int_0^t K(t,s)\Delta(s,\varepsilon)ds\equiv-\varepsilon^{N+1}\int_0^t P(s,\varepsilon)ds,$$

а значит, согласно (22), имеет место оценка

$$\left\|\Delta(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le\nu_N\varepsilon^N\left\|P(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le\overline{C}_N\varepsilon^N,$$

где постоянная $\overline{C}_N>0$ не зависит от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Используя гладкость коэффициентов уравнения (1), можно построить частичную сумму $y_{\varepsilon,N+1}(t)$ и получить стандартным способом [11, с. 121] обычную оценку $\left\|y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)\right\|_{C[0,T]}\le C_N\varepsilon^{N+1}$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1) — 2). Тогда при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *(*$\varepsilon_0>0$ *— достаточно мало) уравнение (1) имеет единственное решение* $y(t,\varepsilon)\in C([0,T],\mathbb{R})$*, при этом имеет место оценка*

$$\left\|y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)\right\|_{C[0,T]}\le c_N\varepsilon^{N+1},\ N=-1,0,1,...,$$

где $y_{\varepsilon N}(t)$ *— сужение (при* $\tau=\psi(t)/\varepsilon$*) N-й частичной суммы ряда (7) (с коэффициентами* $y_k(t,\tau)\in U$*, удовлетворяющими итерационным задачам (*9_k*)), а постоянная* $C_N>0$ *не зависит от* ε *при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Запишем главный член асимптотики решения задачи (3) (а значит, и исходной задачи (1))

$$y_{\varepsilon 0}(t)=\varepsilon^{-1}y_{-1}\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)+y_0\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)=$$
$$=\varepsilon^{-1}h_1(0)e^{\int_0^t\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_1(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t)+$$
$$+\left(\alpha_1^0e^{\int_0^t\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}}+\int_0^t e^{-\int_t^s\frac{G(\theta,\theta)d\theta}{\lambda_1(\theta)}}l(s)ds\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_1(\theta)d\theta}+ \tag{*}$$
$$+\frac{i\beta'(t)h_2(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(\theta)d\theta},$$

где $l(t)$ вычисляется по (20*a*), и проанализируем его.

Если $h_1(0)\ne0$, то точное решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), стремясь к бесконечности при $\varepsilon\to+0$ в точке $t=0$, совершает при $t>0$ быстрые осцилляции около $y_0^{(0)}(t)$. Если $h_1(0)=0$ то решение $y(t,\varepsilon)$, оставаясь ограниченным при $\varepsilon\to+0$, совершает при $t>0$ быстрые осцилляции около решения $y_0^{(0)}(t)$ интегрального уравнения

$$y_0^{(0)}(t)=\int_0^t\left(-\frac{G(t,s)}{\lambda_1(t)}\right)y_0^{(0)}(s)ds-\frac{h_1'(t)}{\lambda_1(t)}.$$

Нетрудно видеть, что данное уравнение получено из вырожденного (по отношению к (1)) уравнения со скачком:

$$-\int_0^t K(t,s)\overline{\overline{y}}(s)\,ds = h_1(t)+\Delta(t),$$

где $\Delta(t) = -\int\limits_0^t \frac{G(x,0)}{\lambda_1(0)} h_1(0)\,dx.$

Пример. Пусть дано уравнение

$$\varepsilon y(t) = -\int\limits_0^t (t-s+1)\,y(s)\,ds + t^2 + \\ +1+\varepsilon(t+1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{i\cdot t}{\varepsilon}}, t\in[0,T]. \tag{23}$$

Можно получить его решение в квадратурах (с помощью программы Maple), но вычленить в нем асимптотическое решение уравнения (1) вряд ли возможно. Сделаем это с помощью разработанного алгоритма метода регуляризации. Воспользуемся формулой (*).

В нашем случае

$$K(t,s) = -(t-s+1), \lambda_1(t) = K(t,t) = -1, G(t,s) = -1;$$
$$h_1(t) = t^2+1, h_2(t) = t+1, \beta(t) = t, \lambda_2(t) = i\beta'(t) = i;$$
$$\alpha_1^{(-1)}(0) = h_1(0) = 1.$$

Функция $y_0^{(0)}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$y_0^{(0)}(t) = \int\limits_0^t \left(-\frac{G(t,s)}{\lambda_1(t)}\right) y_0^{(0)}(s)\,ds - \frac{h_1'(t)}{\lambda_1(t)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y_0^{(0)}(t) = -\int\limits_0^t y_0^{(0)}(s)\,ds + 2t,$$

легко решаемого дифференцированием по t:

$$\frac{dy_0^{(0)}(t)}{dt} = -y_0^{(0)}(t)+2;\ \ y_0^{(0)}(0) = 0 \Leftrightarrow y_0^{(0)}(t) = 2-2e^{-t}.$$

Запишем главный член асимптотического решения уравнения (1):

$$y_{\varepsilon 0}(t) = \varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{t-\frac{t}{\varepsilon}} + 2 - 2e^{-t} + \left(-\frac{i}{i+1}e^{t} + \mathrm{e}^{\frac{i}{\varepsilon}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}} +$$
$$+\left(\int_0^t e^{-s} l(s)\,ds\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{i(t+1)}{i+1}\mathrm{e}^{-\frac{it}{\varepsilon}}.$$

Литература

1. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

2. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011.

3. **Рыжих А.Д.** Применение метода регуляризации для уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Материалы Всесоюз. конф. по асимптотическим методам. Ч. I. Алма-Ата: Наука, 1979, С. 64—66.

4. **Фещенко К.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1966.

5. **Шкиль Н.И.** Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях, Киев: Наукова думка, 1971.

6. **Далецкий Ю.Л.** Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // Доклады АН СССР. 1962. Т. 143. № 5. С. 1026—1029.

7. **Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф.** Интегро-дифференцированные сингулярно возмущенные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Вестник КарГУ. Серия «Математика». 2019. Т. 94. № 2. С. 33—47.

8. **Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф.** Интегро-дифференциальные сингулярно возмущенные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Современные проблемы математики и механики: Материалы Междунар. конф. М.: МАКС Пресс, 2019. С. 299—302.

9. **Калимбетов Б.Т.** Асимптотика решений интегро-дифференциальной системы с параметрическим

References

1. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnykh Vozmushcheniy. M.: Nauka, 1981. (in Russian).

2. **Lomov S.A., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo MGU im. M.V. Lomonosova, 2011. (in Russian).

3. **Ryzhikh A.D.** Primenenie Metoda Regulyarizatsii dlya Uravneniya s Bystro Ostsilliruyushchimi Koeffitsientami. Materialy Vsesoyuz. Konf. po Asimptoticheskim Metodam. Ch. I. Alma-Ata: Nauka, 1979:64—66. (in Russian).

4. **Feshchenko K.F., Shkil' N.I., Nikolenko L.D.** Asimptoticheskie Metody v Teorii Lineynykh Differentsial'nykh Uravneniy. Kiev: Naukova Dumka, 1966. (in Russian).

5. **Shkil' N.I.** Asimptoticheskie metody v Differentsial'nykh Uravneniyakh, Kiev: Naukova Dumka, 1971. (in Russian).

6. **Daletskiy Yu.L.** Asimptoticheskiy Metod dlya Nekotorykh Differentsial'nykh Uravneniy s Ostsilliruyushchimi Koeffitsientami. Doklady AN SSSR. 1962; 143;5:1026—1029. (in Russian).

7. **Kalimbetov B.T., Safonov V.F.** Integro-differentsirovannye Singulyarno Vozmushchennye Uravneniya s Bystro Ostsilliruyushchimi Koeffitsientami. Vestnik KarGU. Seriya «Matematika». 2019;94;2:33—47. (in Russian).

8. **Kalimbetov B.T., Safonov V.F.** Integro-differentsial'nye Singulyarno Vozmushchennye Uravneniya s Bystro Ostsilliruyushchimi Koeffitsientami. Sovremennye Problemy Matematiki i Mekhaniki: Materialy Mezhdunar. Konf. M.: MAKS Press, 2019:299—302. (in Russian).

9. **Kalimbetov B.T.** Asimptotika Resheniy Integro-differentsial'noy Sistemy s Parametricheskim Usileniem.

усилением // Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики: Материалы Междунар. науч. конф. Караганда, 2019. С. 82—83.

10. **Калимбетов, Б.Т., Темирбеков М.А.** Асимптотика решения сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с быстро осциллирующими коэффициентами // Актуальные проблемы математической физики: Сб. тезисов докл. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019. С. 29—30.

11. **Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.** Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М.: Изд-во МЭИ, 2012.

Teoreticheskie i Prikladnye Voprosy Matematiki, Mekhaniki i Informatiki: Materialy Mezhdunar. Nauch. Konf. Karaganda, 2019:82—83. (in Russian).

10. **Kalimbetov, B.T., Temirbekov M.A.** Asimptotika Resheniya Singulyarno Vozmushchennoy Integro-differentsial'noy Sistemy s Bystro Ostsilliruyushchimi Koeffitsientami. Aktual'nye Problemy Matematicheskoy Fiziki: Sb. Tezisov Dokl. M.: Izd-vo MGU im. M.V. Lomonosova, 2019:29—30. (in Russian).

11. **Safonov V.F., Bobodzhanov A.A.** Kurs Vysshey Matematiki. Singulyarno Vozmushchennye Zadachi i Metod Regulyarizatsii. M.: Izd-vo MEI, 2012. (in Russian).

Сведения об авторах:

Бободжанова Машхура Абдухафизовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: BobojanovaMA@mpei.ru
Сафонов Валерий Федорович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: SafonovVF@mpei.ru
Фомина Юлия Владимировна — старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: FominaYV@mpei.ru

Information about authors:

Bobodzhanova Mashkhura A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: BobojanovaMA@mpei.ru
Safonov Valeriy F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: SafonovVF@mpei.ru
Fomina Yuliya V. — Senior Lecturer of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: FominaYV@mpei.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *03.06.2021*
The article received to the editor: *03.06.2021*