# МАТЕМАТИКА

## *Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)*

УДК 517.972.5
DOI: 10.24160/1993-6982-2022-1-137-140

## Коаналитическая задача продолжения периодической функции в пространствах с весом, имеющим особенность на границе

П.В. Зубков

Известно, что всякая периодическая квадратично-суммируемая со степенным весом в полуполосе функция единственным образом представлена в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих, поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции.
Рассмотрена задача о нахождении такого продолжения периодической функции, чтобы оно наименее уклонялось от весового подпространства Соболева аналитических функций (задача минимизации коаналитического уклонения). Автором ранее была проанализирована задача продолжения функции внутрь круга в пространствах с весом, имеющим особенность на границе. Аналогичные коаналитические задачи изучены другими авторами в безвесовом случае для единичного круга, полуполосы, произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей. Задача ставится в пространствах периодических функций с весом, имеющим степенную особенность на границе, а граничные значения функций берутся из соответствующего пространства Бесова.
Сформулированы известные свойства весовых пространств, в том числе прямая и обратная теоремы о следах функций из рассматриваемых классов. Используя указанные свойства, в рамках идей теории монотонных операторов доказана теорема о существовании и единственности решения задачи.

*Ключевые слова:* весовые пространства, особенность на границе, коаналитическая задача, продолжение функции.

*Для цитирования:* Зубков П.В. Коаналитическая задача продолжения периодической функции в пространствах с весом, имеющим особенность на границе // Вестник МЭИ. 2022. № 1. С. 137—140. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-1-137-140.

## The Coanalytic Problem of Periodic Function Continuation in Spaces with a Weight Having a Singularity at the Boundary

P.V. Zubkov

It is known that any periodic square-summable function with a power-law weight in a half-strip is uniquely represented as an orthogonal sum of analytic and coanalytic components; therefore, it is natural to regard the coanalytic component as a certain nonanalyticity characteristic of the function. The article considers the problem of finding a periodic function extension so that it would deviate from the weighted Sobolev subspace of analytic functions to a minimal extent (the problem of minimizing the coanalytic deviation). In my previous publication, I considered the problem of extending a function to inside a circle in spaces with a weight that has a singularity at the boundary. Other researchers studied similar coanalytic problems in the weightless case for the unit circle, half-strip, and an arbitrary bounded simply connected domain with a smooth boundary. The coanalytic problem is formulated in the spaces of periodic functions with a weight having a power singularity at the boundary, and the boundary values of the functions are taken from the corresponding Besov space. The known properties of weight spaces, including the direct and inverse theorems about the traces of functions from the classes under consideration have been formulated. Using these properties, a theorem about the existence and uniqueness of the coanalytic problem solution is proved within the principles of the monotone operator theory.

*Key words:* weight spaces, singularity at a boundary, coanalytical problem, continuation of a function.

*For citation:* Zubkov P.V. The Coanalytic Problem of Periodic Function Continuation in Spaces with a Weight Having a Singularity at the Boundary. Bulletin of MPEI. 2022;1:137—140. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2022-1-137-140.

**Постановка задачи**

Пусть $G = \{z = x + iy \in C^{-1}: -\pi < x < \pi, y > 0\}$ — полуполоса на комплексной плоскости.

В качестве весовой функции на $G$ рассмотрим степенную функцию вида $\mu(y) = y^L$, где $-1 < L < 1$.

Символом $W^1_{2,L}(G)$ обозначим весовой класс $2\pi$ — периодических функций, определенных на $G$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{W^1_{2,L}(G)} = \left(\left\|\nabla f y^{L/2}\right\|^2_{L_2(G)} + \|f\|^2_{L_2(G)}\right)^{1/2},$$

где

$$\|f\|^2_{L_2(G)} = \iint_G |f|^2\, dxdy;$$

$$\left\|\nabla f y^{L/2}\right\|^2_{L_2(G)} = \iint_G \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right) y^L dxdy$$

— так называемый «весовой интеграл Дирихле».

Перечислим ряд свойств введенного класса $W^1_{2,L}(G)$ функций (по материалам [1]).

1. Пусть $-1 < L < 1$, тогда справедливо вложение $W^1_{2,L}(G) \subset B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$. Это означает, что если $f \in W^1_{2,L}(G)$, то она имеет на границе $y = 0$ следы

$$f\big|_{y=0} = f_0 \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi),$$

и при этом выполняется неравенство

$$\|f_0\|_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)} \le C\|f\|_{W^1_{2,L}(G)},$$

где константа $C$ не зависит от функции $f$. Здесь и далее $B_2^\nu(-\pi, \pi)$, $\nu > 0$ — пространство Бесова [2, с. 267—268].

2. Пусть вновь $-1 < L < 1$. Тогда, если задана функция $f_0 \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$, то существует функция $f \in W^1_{2,L}(G)$, для которой выполнено равенство $f\big|_{y=0} = f_0$ и справедлива оценка

$$\|f\|_{W^1_{2,L}(G)} \le C\|f_0\|_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)}.$$

3. Пусть $-1 < L < 1$, тогда справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_2(G)} \le C\left\{\|f_0\|_{L_2(-\pi,\pi)} + \left\|\nabla f y^{L/2}\right\|_{L_2(G)}\right\},$$

где $f\big|_{y=0} = f_0$, константа $C$ не зависит от $f$.

4. Обозначим символом $\dot{W}^1_{2,L}(G)$ замыкание множества $2\pi$ — периодических финитных бесконечно дифференцируемых в $G$ функций в норме пространства $W^1_{2,L}(G)$. Тогда при $-1 < L < 1$

$$\dot{W}^1_{2,L}(G) = \left\{f \in W^1_{2,L}(G) : f\big|_{y=0} = 0\right\}.$$

5. Пусть $f_0(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ имеет разложение в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$, задаваемое формулой

$$f_0(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда $f_0(x) \in B_2^\nu(-\pi, \pi)$, $\nu \ge 0$, в том и только том случае, если

$$\|f_0\|^2_{B_2^\nu(-\pi,\pi)} = \frac{|\alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\nu}\left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2\right) < +\infty.$$

В [3] доказано, что всякая периодическая суммируемая с квадратом функция в весовом пространстве может быть представлена в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих

$$f(z) = f_a(z) + f_{ca}(z),$$

поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции.

В [4] обоснована эквивалентность норм весового пространства из [3] и пространства $W^1_{2,L}(G)$, используемого в настоящей работе. В невесовом случае ($L = 0$) коаналитическая задача исследована Ю.А. Дубинским в [5, 6] для круга единичного радиуса и полуполосы, Ю.А. Дубинским и А.С. Осипенко в [7] — для произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей. Проведенный анализ математических баз данных Math-Net, ZentralMath, MathSciNet, а также баз цитирования РИНЦ и Scopus показал, что в последние годы другими авторами данная задача не анализировалась.

**Определение.** *Мерой неаналитичности или (что то же) коаналитическим уклонением функции* $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$ *назовем число*

$$m(f, L) = \|f_{ca}\|^2_{W^1_{2,L}(G)} \equiv \left\|\nabla(f - f_a)\, y^{L/2}\right\|^2_{L_2(G)} +$$

$$+\|f - f_a\|^2_{L_2(G)}.$$

С учетом данного определения обратимся к постановке задачи продолжения $2\pi$ — периодической функции $f_0(x) \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$ внутрь полуполосы.

**Задача.** *Среди всевозможных продолжений*

$$f(z) \in W^1_{2,L}(G), f(z + 2\pi) = f(z), f(z)\big|_{y=0} =$$

$$= f_0(x) \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$$

*найти то, которое имеет наименьшее коаналитическое уклонение* $m(f, L)$.

Иными словами, ставится задача минимизации функционала

$$\|f_{ca}\|^2_{W^1_{2,L}(G)} \to \min,$$

где $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$, $f(z + 2\pi) = f(z)$ — всевозможные периодические продолжения фиксированной функции $f_0(x) \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$.

Известно, что в точке минимума вариация функционала $m(f, L)$ равна нулю, в том числе для любой функции $g(z) \in \dot{W}^1_{2,L}(G)$, тогда имеем

$$A(f)g \equiv \iint\limits_G \begin{bmatrix} \nabla(f-f_a)\nabla(\bar{g}-\bar{g}_a)y^L + \\ +(f-f_a)(\bar{g}-\bar{g}_a) \end{bmatrix} dxdy = 0. \quad (1)$$

Следовательно, поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: найти периодическую функцию $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$, удовлетворяющую уравнению

$$A(f) = 0, \qquad (2)$$

где $A(f)$ — оператор, ассоциированный с интегральным тождеством (1), при дополнительном условии

$$f(z)|_{y=0} = f_0(x), \qquad (3)$$

где функция $f_0(x) \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$.

**Существование и единственность наилучшего продолжения**

Имеет место

**Теорема.** *Для любой функции* $f_0(x) \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$ *существует единственное решение* $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$, $f(z+2\pi) = f(z)$ *задачи* (2), (3) *или, что то же, задачи минимизации коаналитического уклонения при* $-1 < L < 1$.

Доказательство как существования, так и единственности решения, установлено в рамках идей теории монотонных операторов.

**Существование.** Прежде всего сведем задачу к случаю нулевой функции на границе. Пусть $h(z) \in W^1_{2,L}(G)$, $h(z+2\pi) = h(z)$ — какое-либо фиксированное $2\pi$ — периодическое продолжение функции $f_0(x)$, т. е. $h(z)|_{y=0} = f_0(x)$ (свойство 2 весовых пространств). Положим $u(z) = f(z) - h(z)$, тогда функция $u(z) \in \dot{W}^1_{2,L}(G)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$A(u+h)g(z) = 0,$$

где $g(z) \in W^1_{2,L}(G)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям $g(z+2\pi) = g(z)$, $g(z)|_{y=0} = 0$.

Заметим, что $A(u + h)$ действует из $\dot{W}^1_{2,L}(G)$ в сопряженное пространство $(\dot{W}^1_{2,L}(G))^*$ и является деминепрерывным оператором.

Пусть $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, … — базисная система в пространстве $\dot{W}^1_{2,L}(G)$. Приближенное решение $u^N(z)$, $N = 1, 2, \ldots$, найдем в виде

$$u^N(z) = C_1^N\psi^1(z) + \ldots + C_N^N\psi^N(z),$$

где неизвестные постоянные $C_1^N, \ldots, C_N^N$ установлены из нелинейной системы моментных уравнений Галеркина

$$A(u^N + h)\psi^j(z) = 0, j = 1, \ldots, N. \qquad (4)$$

В силу свойства монотонности оператора $A(u^N + h)$ система (4) однозначно разрешима, при этом для коаналитических составляющих $u^N_{ca}(z)$ имеем оценку

$$\left\|u^N_{ca}\right\|_{W^1_{2,L}(G)} \le M, \qquad (5)$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от $N$.

Покажем, что и для аналитических составляющих $u^N_a(z)$ справедлива аналогичная оценка. Действительно, из (5) и свойства 1 рассматриваемых весовых пространств, следует, что для всех $N$

$$\left\| u^N_{ca}(z)\big|_{y=0} \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)} \le M_1 \left\|u^N_{ca}\right\|_{W^1_{2,L}(G)} \le M_2,$$

где $M_1 > 0$ — постоянная.

Учитывая, что $u^N_a(z)|_\Gamma + u^N_{ca}(z)|_\Gamma = 0$, найдем, что и

$$\left\| u^N_a(z)\big|_{y=0} \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)} \le M_2,$$

где $M_2 > 0$ не зависит от $N$.

Остается заметить, что для аналитической составляющей справедлива оценка

$$\left\|u^N_a\right\|_{W^1_{2,L}(G)} \le M_3 \left\| u^N_a(z)\big|_{y=0} \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)} \le M_4, M_4 > 0.$$

Доказательство данного факта изложим в лемме.

**Лемма.** *Имеет место следующая оценка*

$$\left\|f_a\right\|_{W^1_{2,L}(G)} \le C \left\| f_a(z)\big|_{y=0} \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)} \qquad (6)$$

*для любой функции* $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$ *при условии, что* $\left\| f_a(z)\big|_{y=0} \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)}$ *конечна.*

**Доказательство леммы.**

Заметим, что в силу свойств 5 и 3 весовых пространств достаточно получить оценку только для весового интеграла Дирихле аналитической функции

$$\left\|\nabla f_a y^{L/2}\right\|^2_{L_2(G)} \le C \left\| f_a\big|_{y=0} \right\|^2_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)}.$$

Используя представление периодической аналитической в полуполосе $G$ функции

$$f_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inz}$$

и равенство Парсеваля, придем к следующему соотношению

$$\left\|\nabla f_a y^{L/2}\right\|^2_{L_2(G)} \le C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \int_0^{+\infty} y^L e^{-2ny} dy.$$

В силу определения эйлерова интеграла второго рода (гамма-функции Эйлера) [8, с. 811—814] заметим, что при $-1 < L < 1$

$$\int_0^{+\infty} y^L e^{-2ny} dy = \frac{\Gamma(L+1)}{(2n)^{L+1}}.$$

В результате

$$\left\|\nabla f_a y^{L/2}\right\|^2_{L_2(G)} \le C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 |c_n|^2 \Gamma(L+1)}{(2n)^{L+1}} \le$$

$$\le C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-L} |c_n|^2 \le C_3 \left\| f_a\big|_{y=0} \right\|^2_{B_2^{(1-L)/2}(-\pi,\pi)}.$$

Таким образом, оценка (6) и, тем самым, лемма доказаны.

Продолжим доказательство теоремы. В конечном итоге получим оценку

$$\left\|u^N\right\|_{W^1_{2,L}(G)} \le M_5,$$

где $M_5 > 0$ не зависит от $N$.

Установим, что предельная точка $u(z)$ последовательности $u^N(z)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4). Существование решения доказано.

**Единственность.** Действительно, пусть функции $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$ и $g(z) \in W^1_{2,L}(G)$ — два решения задачи (2), (3). Тогда, исходя из тождества (1), стандартно получим, что их коаналитические составляющие равны, т. е. $f_{ca}(z) \equiv g_{ca}(z)$. Отсюда, учитывая, что

$$(f(z) - g(z))\big|_{y=0} = 0,$$

установим, что $f_a(z)\big|_{y=0} = g_a(z)\big|_{y=0}$.

Следовательно, в силу леммы $f_a(z) \equiv g_a(z)$, и, тем самым, $f(z) \equiv g(z)$. Единственность, а вместе с ней и теорема, полностью доказаны.

## Литература


1. **Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В.** Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Известия высших учебных заведений. 1988. Т. 315. № 8. С. 4—30.
2. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
3. **Зубков П.В.** Аналитическая нелинейная периодическая задача в полуполосе в пространствах с весом, имеющим особенность на границе // Вестник МЭИ. 2009. № 6. С. 5—14.
4. **Зубков П.В.** Эквивалентные нормы в пространствах с весом, имеющим особенность на границе области // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 178—180.
5. **Дубинский Ю.А.** О продолжении функции с наименьшим коаналитическим уклонением // Математические заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 45—57.
6. **Дубинский Ю.А.** Об одной задаче наилучшего продолжения периодической функции // Доклады АН. 1998. Т. 360. № 1. С. 10—12.
7. **Дубинский Ю.А., Осипенко А.С.** Нелинейные аналитические и коаналитические задачи ($L_p$-теория, клиффордов анализ, примеры) // Математический сборник. 2000. Т. 191. № 1. С. 65—102.
8. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2006.


## References


1. **Nikol'skiy S.M., Lizorkin P.I., Miroshin N.V.** Vesovye Funktsional'nye Prostranstva i Ikh Prilozheniya k Issledovaniyu Kraevykh Zadach dlya Vyrozhdayushchikhsya Ellipticheskikh Uravneniy. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. 1988;315;8:4—30. (in Russian).
2. **Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skiy S.M.** Integral'nye Predstavleniya Funktsiy i Teoremy Vlozheniya. M.: Nauka, 1996. (in Russian).
3. **Zubkov P.V.** Analiticheskaya Nelineynaya Periodicheskaya Zadacha v Polupolose v Prostranstvakh s Vesom, Imeyushchim Osobennost' na Granitse. Vestnik MEI. 2009;6:5—14. (in Russian).
4. **Zubkov P.V.** Ekvivalentnye Normy v Prostranstvakh s Vesom, Imeyushchim Osobennost' na Granitse Oblasti. Vestnik MEI. 2017;6:178—180. (in Russian).
5. **Dubinskiy Yu.A.** O Prodolzhenii Funktsii s Naimen'shim Koanaliticheskim Ukloneniem. Matematicheskie Zametki. 1998;64;1:45—57. (in Russian).
6. **Dubinskiy Yu.A.** Ob Odnoy Zadache Nailuchshego Prodolzheniya Periodicheskoy Funktsii. Doklady AN. 1998;360;1:10—12. (in Russian).
7. **Dubinskiy Yu.A., Osipenko A.S.** Nelineynye Analiticheskie i Koanaliticheskie Zadachi ($L_p$-teoriya, Kliffordov Analiz, Primery). Matematicheskiy Sbornik. 2000;191;1:65—102. (in Russian).
8. **Fikhtengol'ts G.M.** Kurs Differentsial'nogo i Integral'nogo Ischisleniya. T. 2. M.: Fizmatlit, 2006. (in Russian).



**Сведения об авторе:**

**Зубков Павел Валерьевич** — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: ZubkovPV@mpei.ru

**Information about author:**

**Zubkov Pavel V.** — Ph.D. (Phys.-Math.), Head of Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: ZubkovPV@mpei.ru



**Работа выполнена при поддержке:** Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWF-2020-0022)

**The work is executed at support:** Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FSWF-2020-0022)

**Статья поступила в редакцию:** *17.05.2021*
**The article received to the editor:** *17.05.2021*