УДК 621.398
DOI: 10.24160/1993-6982-2021-6-115-121

Терминальное управление с гарантированной точностью по интервальной модели системы

Н.В. Скибицкий

Сформулирована задача оптимального терминального управления линейной стационарной системой с известными с точностью до интервалов параметрами, определены необходимые и достаточные условия её устойчивости и управляемости.
Получено множество управляющих воздействий, гарантирующих заданную точность решения задачи оптимального управления при интервальной модели исходных данных. Установлены необходимые и достаточные условия существования данного множества, разработаны алгоритмы его построения и получения его прямоугольного подмножества максимального объема.
Определены априорные требования к точности идентификации параметров системы с учетом требований к точности решения задачи управления.

Ключевые слова: система управления, терминальное управление, интервальные неопределённость и анализ, гарантированный интервал неопределенности, управление с заданной точностью.

Для цитирования: Скибицкий Н.В. Терминальное управление с гарантированной точностью по интервальной модели систем // Вестник МЭИ. 2021. № 6. С. 115—121. DOI: 10.24160/1993-6982-2021-6-115-121.

Terminal Control with Guaranteed Accuracy Based on the Interval System Model

N.V. Skibitskiy

The problem of optimal terminal control of a linear stationary system the parameters of which are known with accuracy up to intervals is formulated, and the necessary and sufficient conditions for its stability and controllability are determined. A set of control actions that guarantee the specified accuracy of solving the optimal control problem given an interval model of the initial data is obtained. The necessary and sufficient conditions for the existence of this set are determined, and algorithms for its construction and obtaining its rectangular subset of the maximum volume are developed. A priori requirements for the accuracy of identifying the system parameters are formulated taking into account the requirements for the control problem solution accuracy.

Key words: control system, terminal control, interval uncertainty, interval analysis, guaranteed uncertainty interval, control with specified accuracy.

For citation: Skibitskiy N.V. Terminal Control with Guaranteed Accuracy Based on the Interval System Model. Bulletin of MPEI. 2021;6:115—121. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2021-6-115-121.

Введение

Одна из актуальных задач теории управления, получившая название задачи терминального управления [1 — 3], — проблема перевода объекта из заданного начального состояния $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{(0)}$ в момент времени t_0 в требуемое конечное состояние $\vec{x}(t_k) = \vec{x}^{(k)}$ к моменту времени t_k. В качестве критерия управления при этом часто используют функционал [4 — 6]

$$J = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t)dt, \tag{1}$$

граничные условия записывают в виде

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{(0)};\ \vec{x}(t_k) = \vec{x}^{(k)}, \tag{2}$$

а для описания объекта широко применяют уравнения состояния

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}u, \tag{3}$$

где $\vec{x} \in R^n$ — вектор переменных состояния; $A \in R^{n\times n}$ — матрица состояния; $u \in R^1$ — входное управляющее воздействие; $\vec{b} \in R^n$ — вектор, компоненты которого непосредственно связаны с параметрами системы.

При точно известном описании объекта оптимальное управление для поставленной задачи имеет вид [1]:

$$u(t) = \vec{b}^T \vec{\alpha}(t)\big/2. \tag{4}$$

где $\vec{\alpha}(t)$ — решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}\vec{b}^T \alpha(t)\big/2; \tag{5}$$

$$\dot{\vec{\alpha}}(t) = -A^T \vec{\alpha}(t) \tag{6}$$

или

$$\dot{\vec{z}} = Q\vec{z}, \tag{7}$$

где $\vec{z}^T = (x_1, x_2, ..., x_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$;

$$Q = \begin{bmatrix} A & \vec{b}\vec{b}^T / 2 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix};\ Q \in R^{2n\times 2n}$$

с граничными условиями (2).

Показано [7], что если матрица A имеет собственные числа λ_i, $i = 1, 2, ..., n$, то матрица Q имеет собственные числа $\lambda_i, -\lambda_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда решение системы (7) запишем как

$$\vec{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \vec{p}^{(i)} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \vec{q}^{(i)} e^{-\lambda_i t}, \qquad (8)$$

где $\vec{p}^{(i)} \in R^{2n}$, $\vec{q}^{(i)} \in R^{2n}$ — собственные векторы матрицы Q, соответствующие собственным числам λ_i, $i = 1, 2, ..., n$ и $-\lambda_i$, $i = 1, 2, ..., n$; r_i, ω_i, $i = 1, 2, ..., n$ — константы, определяемые из соотношений (5), (6).

Перепишем (4) с учетом (8) в виде

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} \left(r_i p_{n+i}^{(j)} e^{\lambda_i t} + \omega_j q_{n+i}^{(j)} e^{-\lambda_i t} \right) \right) \Big/ 2, \qquad (9)$$

где $p_{n+i}^{(j)}$, $q_{n+i}^{(j)}$ представляют собой $(n + i)$-е составляющие векторов $\vec{p}^{(j)}$ и $\vec{q}^{(j)}$ соответственно.

Особенности решения задачи оптимального управления по интервальной модели

Классическая теория управления предусматривает, как правило, наличие точного аналитического описания объекта управления. Вместе с тем, в реальной практике априорная информация нередко ограничена заданием лишь интервалов возможных значений параметров объекта, что приводит к задачам управления в условиях интервальной неопределенности [8]. В этом случае некоторую переменную или константу a можно задать интервалом $[a]$ её возможных значений $[a] = [a: a^- \le a \le a^+]$, где a^- и a^+ — известные нижняя и верхняя границы.

Матрица A и векторы $\vec{b}, \vec{c}$ в (3) содержат интервальные элементы, т. е.

$$A \in A(I) \subset M^{n*n}(IR), a_{ij} \in [a_{ij}^-, a_{ij}^+];$$
$$\vec{b} \in \vec{b}(I) \subset M^{n*1}(IR);\ b_i \in [b_i^-, b_i^+];$$
$$\vec{c} \in \vec{c}(I) \subset M^{n*1}(IR), c_i \in [c_i^-, c_i^+],$$

а описание объекта задаётся как

$$[\dot{\vec{x}}] = [A]\vec{x} + [\vec{b}]u(t). \qquad (10)$$

Непосредственное применение интервальной арифметики при решении рассматриваемой задачи управления некорректно, поскольку получится так называемое интервальное расширение [9, 10]. Поэтому в работе использован аппарат интервального анализа, который, в отличие от интервальной компьютерной арифметики [11 — 13], позволяет оперировать с именами переменных, а не только с их значениями.

Обычно матрица A в (3) имеет произвольный вид. В то же время, для решения задачи управления предпочтительнее её специальные формы (диагональная, сопровождающая и т. д.), упрощающие и унифицирующие алгоритмы управления. Следовательно, важно уметь с помощью эквивалентных преобразований, меняющих вид матрицы системы, но оставляющих неизменными свойства решений, переходить от одной её формы к другой. Для реализации эквивалентных преобразований при интервально заданных параметрах объекта нужно последовательно решить ряд задач, каждая из которых в случае интервальной неопределенности нетривиальна. Последовательность и алгоритмы их решения подробно рассмотрены в [14].

С учётом сказанного, без потери общности, пусть матрица A задана в канонической форме, и уравнения состояния имеют вид

$$A(I) = \begin{bmatrix} [a_1] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & [a_2] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [a_{n-1}] & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [a_n] \end{bmatrix};$$
$$a_i \in [a_i] (i = 1, 2, ..., n);\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Устойчивость и управляемость системы, описанной интервальной моделью

Прежде чем перейти непосредственно к решению задач управления, необходимо определить такие основополагающие понятия, как устойчивость и управляемость системы при интервальной неопределенности на параметры объекта [15].

Устойчивость. Исследования устойчивости непрерывной линейной динамической системы с известными с точностью до интервалов параметрами базируются на теореме Харитонова о робастной устойчивости [16], определяющей необходимое и достаточное условие устойчивости, и в соответствии с которой систему

$$[\dot{\vec{x}}] = [A]\vec{x}$$

называют робастно устойчивой, если для любого $a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 0 \div n$ корни её характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости.

Конкретизируем условие устойчивости системы для случая, когда матрица системы имеет вид (11).

Показано [15], что для устойчивости линейной стационарной системы (10), (11) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы $A(I)$ удовлетворяли условию $\mathrm{Re}\lambda_i^+ < 0$ для $\forall a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, где λ_i^+ — верхняя граница интервального собственного числа λ_i матрицы $A(I)$.

Лемма 1. *Собственные числа* $[\lambda_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ *матрицы* $A(I)$ *представляют собой интервальные числа, такие, что* $[\lambda_i] = [a_i]$, *причем для* $\forall a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, *существует такое* $\lambda_i \in [\lambda_i]$, *что* $\lambda_i = a_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Для того, чтобы система (10), (11) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $\mathrm{Re}a_i^+ < 0$ для $\forall a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Управляемость. В случае точно известных параметров система (3) считается управляемой, если для любой точки $\vec{x}^{(0)} \in R^n$ на конечном интервале $[t_0, t_k]$ существует управление, переводящее объект из состояния $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{(0)}$ в состояние $\vec{x}(t_k) = \vec{x}^{(k)}$. Поскольку в нашем случае элементы матрицы $A(I)$ известны с точностью до интервала, для того, чтобы объект был управляем, необходимо, чтобы он был управляем для любых возможных значений параметров $a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Очевидно, что не существует единственного управления, которое смогло бы гарантировать точный перевод объекта с любыми возможными значениями параметров $a_i^1 \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ из состояния $\vec{x}^{(0)}$ в состояние $\vec{x}^{(k)}$. Если управление $u^1(t)$ переводит объект с параметрами $a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ из $\vec{x}^{(0)}$ в $\vec{x}^{(k)}$ за конечный интервал времени $[t_0, t_k]$, то оно не может одновременно переводить объект с параметрами $a_i^2 \in [a_i]$, $(a_i^1 \neq a_i^2)$ $i = 1, 2, ..., n$ из $\vec{x}^{(0)}$ точно в $\vec{x}^{(k)}$. В связи с этим, управляемость объекта с интервально заданными параметрами определим следующим образом.

Определение. Система (10), (11) управляема, если для любого состояния $\vec{x}^{(0)} \in R^n$ на конечном интервале времени $[t_0, t_k]$ существуют допустимое управление $u(t)$ и область $S(\vec{x}^{(0}, t_0, t_k, \Delta_a) > 0$ такие, что управление $u(t)$ переводит систему с любыми возможными значениями параметров $a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ из состояния $\vec{x}^{(0)}$ в состояние $\vec{x}^{(k)}$, причем

$$\left\|\vec{x}^{(1)}\right\| < S\left(\vec{x}^{(0)}, t_0, t_k, \Delta_a\right),$$

где $\|\vec{x}^{(k)}\|$ — норма вектора $\vec{x}^{(k)}$;

$$\Delta_a = \max_{1 \le i \le n} \left|a_i^+ - a_i^-\right|.$$

В дальнейшем в работе рассмотрены системы, удовлетворяющие условиям устойчивости и управляемости.

Решение задачи оптимального управления по интервальной модели

Для изучаемой задачи при точно известных параметрах управляющая функция имеет вид (9).

Лемма 2. *Собственные числа матрицы $Q(I)$ являются интервальными числами, причем $[\lambda_i] = [a_i]$, $-[\lambda_i] = -[a_i]$ и для любых $a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ и $-a_i \in -[a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, существуют соответственно $\lambda_i \in [\lambda_i]$ и $-\lambda_i \in [-\lambda_i]$, такие, что $\lambda_i = a_i$, $-\lambda_i = -a_i$.*

Собственные векторы, соответствующие собственным числам $[\lambda_i]$ и $-[\lambda_i]$, обозначим $\vec{p}^{(i)}(I)$ и $\vec{q}^{(i)}(I)$, причем:

$$\vec{p}^{(i)}(I) = \left\{ \begin{matrix} \vec{p}^{(i)} \in R^{2n} : \left(\exists \lambda_i \in [\lambda_i] = [a_i]\right) \times \\ \times \left(\exists Q \in Q(I)\right)\left(Q\vec{p}^{(i)} = \lambda_i \vec{p}^{(i)}\right) \end{matrix} \right\}, i = 1, 2, ..., n;$$

$$\vec{q}^{(i)}(I) = \left\{ \begin{matrix} \vec{q}^{(i)} \in R^{2n} : \left(\exists -\lambda_i \in -[\lambda_i] = -[a_i]\right) \times \\ \times \left(\exists Q \in Q(I)\right)\left(Q\vec{q}^{(i)} = -\lambda_i \vec{q}^{(i)}\right) \end{matrix} \right\}, i = 1, 2, ..., n.$$

Система [15] имеет простые корни, если

$$[a_i] \cap [a_j] = \emptyset, i, j = 1, 2, ..., n, \; i \neq j. \quad (12)$$

Тогда справедливо следующее утверждение [15].

Утверждение 2. Если при любых значениях $a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, матрица $A \in A(I)$ является знакоопределенной и справедливо условие (12), то

$$\vec{p}^{(i)T}(I) = (0, 0, ..., 0, v, 0, ..., 0),$$

где v — произвольное число, представляющее собой i-ю компоненту вектора $\vec{p}^{(i)}(I)$.

$$\vec{q}^{(i)T}(I) = \left(\begin{matrix} -\frac{\nu}{2([a_1] + [a_i]]}, ..., -\frac{\nu}{2([a_i] + [a_i]]}, ..., - \\ -\frac{\nu}{2([a_n] + [a_i]]}, 0, ..., v, ..., 0 \end{matrix} \right). \quad (13)$$

Таким образом, вектор $\vec{p}^{(i)}(I)$ считается вырожденным интервальным вектором.

Из соотношений (9), (13) при $v = 1$, с учетом того, что $\vec{b}^T = (1, 1, ..., 1)$, получим

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\omega_i e^{-\lambda_i t}\right) \Big/ 2. \quad (14)$$

Определим множество управляющих воздействий Ω_u^1, которое бы позволило для каждой матрицы $A \in A(I)$ найти управляющее воздействие, гарантирующее точный перевод системы из $\vec{x}^{(0}$ в точку $\vec{x}^{(k)}$ фазового пространства [17], т. е.

$$\Omega_u^1 = \left\{u \in R^1 : \exists A \in A(I), \vec{x}(t_0, t_k, A, u) = \vec{x}^{(k)}\right\}. \quad (15)$$

Теорема 1. *Множество управляющих воздействий Ω_u^1, удовлетворяющих условию (15), имеет вид*

$$\Omega_u^1 = \left\{ \begin{matrix} u \in R^1 : u = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^{-\lambda_i t} \big/ 2, \forall \omega_i \in \Omega_1, \\ \forall \lambda_i \in [a_i], i = 1, 2, ..., n \end{matrix} \right\},$$

где

$$\Omega_1 = \left\{\vec{\omega} \in R^n : \exists A \in A(I), G(A) = \vec{c}(A)\right\};$$

$$G(A) = \left(e^{A(t_k - t_0)} \times \int_{t_0}^{t_k} e^{A(t_0 - \tau)} \vec{b}\vec{b}^T e^{A^T(t_0 - \tau)} d\tau \times e^{-At_0} \right) \Big/ 2; \quad (16)$$

$$\vec{c}(A) = \vec{x}^{(k)} - e^{A(t_k - t_0)} \vec{x}^{(0)}.$$

Для рассмотренной задачи матрица $G(A)$ всегда невырожденная при $\forall A \in A(I)$, так как является произведением трёх невырожденных матриц [17]. Следовательно, множество Ω_1 всегда непустое и вырождается в точку при $a_i^- = a_i^+$, $i = 1, 2, ..., n$.

Множество Ω_1 в общем случае невыпуклое [18], но представляет собой объединение конечного числа выпуклых многогранников Ω_1^k, $k = 1, 2, ..., 2^n$, определяемых системой неравенств:

$$\Omega_1^k = \begin{cases} \min\limits_{G\in G(A)} G(A)\vec{\omega} \le \max\limits_{A\in A(I)} \vec{c}(A); \\ \max\limits_{G\in G(A)} G(A)\vec{\omega} \ge \min\limits_{A\in A(I)} \vec{c}(A). \end{cases} \quad (17)$$

Интегрируя (16) с учетом (11), получим

$$G(A) = \left\{ g_{ij} = \frac{\left(e^{a_i(t_k - t_0) - a_j t_0} - e^{-a_i t_k}\right)}{2(a_i - a_j)} \right\}. \quad (18)$$

Теорема 1 фактически переводит задачу определения совокупности управляющих воздействий, гарантирующих точный переход системы в заданное конечное состояние для некоторой матрицы параметров $A \in A(I)$, в решение системы линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами

$$G(I)\vec{\omega} = \vec{c}(I) \quad (19)$$

и определение множества

$$\Omega_1 = \left\{\vec{\omega} \in R^n : \exists G \in G(I), G\vec{\omega} = \vec{c}(I)\right\},$$

называемое внешним решением системы (19) [19].

Здесь $G(I)$ — матрица системы линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами; $\vec{c}(I)$ — интервальное расширение множества векторов [20].

Любой элемент $\vec{\omega} \in \Omega_1$ позволяет получить управляющее воздействие $u(t)$, гаранитирующее справедливость (2) только для одной конкретной матрицы $A \in A(I)$. Очевидно, что подобная ситуация не может удовлетворять, так как в силу отсутствия информации о точном значении параметров объекта невозможно выбрать адекватное значение параметров управляющего воздействия.

С учетом доказанной в [18] теоремы, согласно которой из условия $[x_i^{(1)}] \subset [x_i^{(2)}]$, $i = 1, 2, ..., n$ следует, что $F([x_i^{(1)}], ..., [x_n^{(1)}]) \subset F([x_i^{(2)}], ..., [x_n^{(2)}])$, где $F([x_1], ..., [x_n])$ — рациональное выражение от интервальных переменных $[x_1], ..., [x_n]$, очевидно, что при выполнении условия $\lambda_i \in -[\lambda_i]$ справедливо отношение включения

$$\vec{x}(t_k) \in [\vec{x}(t_k)],$$

где $\vec{x}(t_k)$ — истинное значение состояния объекта в момент времени t_k, полученное при реализации на реальном объекте управляющего воздействия (14) при произвольном $-\lambda_i \in -[\lambda_i]$; $[\vec{x}(t_k)]$ — множество возможных значений состояния объекта, найденных расчетным путем при реализации на множестве возможных моделей объекта при различных $A \in A(I)$ множествах возможных управляющих воздействий (14) и соответствующих значениях $-\lambda_i \in -[\lambda_i]$.

Заменив в (17) a_i, a_j на интервальные числа $[a_i]$, $[a_j]$, получим интервальное расширение $G(I)$ [7] множества матриц $G(A)$:

$$G(I) = \{g_{ij}(I)\}_{n\times n} = \frac{\left(e^{[a_i](t_k - t_0) - [a_j]t_0} - e^{-[a_i]t_k}\right)}{2\left([a_i] + [a_j]\right)}. \quad (20)$$

В [15] доказано, что

$$G(A) \in G(I), \forall A \in A(I).$$

Тогда прогноз состояния системы при реализации произвольного управляющего воздействия из Ω_u^1 на объекте с возможными параметрами $A \in A(I)$ устанавливается в соответствии с выражением

$$\vec{x}(t_k) \in e^{A(I)(t_k - t_0)} \cdot \vec{x}(t_0) + G(I)\vec{\omega}; \forall \vec{\omega} \in \Omega_1.$$

Решение задачи оптимального управления с заданной точностью

При наличии интервальной неопределенности на параметры объекта вряд ли разумно говорить о решении задачи в том смысле, в котором оно понимается при точно известных параметрах. Если параметры объекта известны точно, то его состояние в конечный момент времени определяется в соответствии с (14) с учётом (2). Если же значения a_i, $i = 1, 2, ..., n$ точно неизвестны, то нельзя гарантировать, что управление, рассчитанное для конкретных значений a_i, обеспечит выполнение условия $\vec{x}(t_k) = \vec{x}^{(k)}$ для произвольных значений $a_i \in [a_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Поэтому ставится задача определения такого множества управляющих воздействий, каждое управление из которого гарантировало бы заданную точность решения для любого $A \in A(I)$.

Вместе с тем, нетрудно показать, что решение данной задачи из условия обеспечения (2) невозможно, поскольку множество управляющих воздействий будет пустым [8]. Поэтому предлагается вместо (2) поставить требование справедливости отношения

$$\vec{x}(t_k) \in \vec{x}^{(k)}(I) = \left[\vec{x}^{(k)-}, \vec{x}^{(k)+}\right], \quad (21)$$

где $\vec{x}^{(k)-}$, $\vec{x}^{(k)+}$ заданы исследователем из условия достаточной точности решения.

Возникает задача определения такого множества управляющих воздействий Ω_u^2, любое управление из которого гарантировало бы перевод системы с заданной точностью (21):

$$\Omega_u^2 = \left\{u \in R^1 : \forall A \in A(I), \vec{x}(t_0, t_k, A, u) \in \vec{x}^{(k)}(I)\right\}. \quad (22)$$

Теорема 2. *Множество управляющих воздействий Ω_u^2, удовлетворяющее условию (22), имеет вид:*

$$\Omega_u^2 =$$
$$= \left\{ u \in R^1 : u = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^{-\lambda_i t} \Big/ 2, \forall \omega_i \in \Omega_2, \forall \lambda_i \in [a_{ii}], i = 1, 2, ..., n \right\},$$

где

$$\Omega_2 = \left\{ \vec{\omega} \in R^n : \forall G \in G(I), G\vec{\omega} \in \vec{c}^{(1)}(I) \right\};$$
$$\vec{c}^{(1)}(I) = \vec{x}^{(k)}(I) \ominus \vec{x}^{(0)} e^{A(I)(t_k - t_0)} =$$
$$= \begin{pmatrix} [x_1^{(k)}] \ominus x_1^{(0)} e^{[a_{11}](t_k - t_0)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ [x_n^{(k)}] \ominus x_n^{(0)} e^{[a_{nn}](t_k - t_0)} \end{pmatrix};$$

$G(I)$ задается выражением (20).

Данная теорема переводит задачу определения допустимых управляющих воздействий, гарантирующих заданную точность на конечное состояние системы, в решение системы линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами

$$G(I)\vec{\omega} = \vec{c}^{(1)}(I), \quad (23)$$

где $\vec{c}^{(1)-}$, $\vec{c}^{(1)+}$ — граничные значения (по составляющим) вектора $\vec{c}^{(1)}(I)$, и определение множества Ω_2, называемого внутренним решением системы [20].

Множество Ω_2 представляет собой выпуклый многогранник с граничными гиперплоскостями, характеризуемыми системой неравенств [17]:

$$\Omega_2 = \begin{cases} \max\limits_{G \in G(I)} G\vec{\omega} \le \vec{c}^{(1)+}; \\ \min\limits_{G \in G(I)} G)\vec{\omega} \ge \vec{c}^{(1)-}. \end{cases} \quad (24)$$

Несмотря на то, что для любой $G \in G(I)$ выполняется $\det G \ne 0$, множество Ω_2 может быть пустым, когда неопределенность параметров системы настолько высока, что при реализации управления $u(t)$ на объекте перевод с априори заданной точностью не может быть выполнен. В связи с этим, приведем необходимые и достаточные условия существования множества Ω_2.

Необходимое условие существования Ω_2:

$$\vec{x}^{(k)+} - \vec{x}^{(k)-} \ge \max_{A \in A(I)} \left(e^{A(I)(t_k - t_0)} \times \vec{x}^{(0)} \right) -$$
$$- \min_{A \in A(I)} \left(e^{A(I)(t_k - t_0)} \times \vec{x}^{(0)} \right). \quad (25)$$

Очевидно, что при нарушении (25) имеет место

$$\vec{c}^{(1)+} = \vec{x}^{(k)+} - \max_{A \in A(I)} \left(e^{A(I)(t_k - t_0)} \times \vec{x}^{(0)} \right) < \vec{c}^{(1)-} =$$
$$= \vec{x}^{(k)-} - \min_{A \in A(I)} \left(e^{A(I)(t_k - t_0)} \times \vec{x}^{(0)} \right),$$

т. е. $\vec{c}^{(1)}(I)$ оказывается пустым и, следовательно, система (25) не имеет решения.

Достаточное условие существования Ω_2:

$$G\vec{\omega}^{(0)} \subseteq \vec{c}^{(1)}(I),$$

где вектор $\vec{\omega}^{(0)}$ — решение системы уравнений

$$G_0\vec{\omega}^{(0)} = \vec{c}^{(0)}; \quad (26)$$

G_0 — центральная (по элементам) матрица из множества $G(I)$, т. е.

$$G_0 = \{g_{ij}\}_{n \times n} = \left\{ (g_{ij}^- + g_{ij}^+)/2 \right\}_{n \times n};$$

$\vec{c}^{(0)}$ — центральный (по составляющим) вектор из множества $\vec{c}^{(1)}(I)$,

$$\vec{c}^{(0)T} = \left(\frac{c_1^{(1)-} + c_1^{(1)+}}{2}, ..., \frac{c_n^{(1)-} + c_n^{(1)+}}{2} \right);$$

$c_i^{(1)-}, c_i^{(1)+}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ — нижняя и верхняя границы i-й составляющей вектора $\vec{c}^{(1)}(I)$.

Очевидность данного условия в том, что вектор $\vec{\omega}^{(0)}$, удовлетворяющий условию (26), представляет собой одно решение в множестве Ω_2.

Таким образом, поиск множества управляющих воздействий Ω_u^2, гарантирующих заданную точность решения задачи управления, сводится к определению множества Ω_2, задающего соответствующие значения параметров управляющего воздействия, т. е. к решению соответствующей системы линейных интервальных уравнений.

Определение полного множества Ω_2 — трудоемкая в вычислительном отношении задача. Если множество $\Omega_2 \ne \varnothing$, то оно представляет собой выпуклый многогранник, образованный пересечением конечного числа замкнутых полупространств, и получаемое решение окажется недостаточно наглядным. Поэтому следует искать некоторое прямоугольное многогранное подмножество Ω_2^1 максимального объема, удовлетворяющее условию

$$\Omega_2^1 \subset \Omega_2.$$

Данный подход сужает множество гарантированных решений, но, в то же время, делает его наглядным и легко применимым в практических задачах.

Множество Ω_2^1 можно установить в три этапа.

Этап 1. Найдем центр $\vec{\omega}^{(0)}$ области Ω_2^1 в соответствии с уравнением

$$M(G(I))\vec{\omega}^{(0)} = M(\vec{c}(I)), \quad (27)$$

где $M(\cdot)$ — центр интервальной матрицы или вектора.

Поскольку $\det G \ne 0$ для $\forall G \in G(I)$, то для рассматриваемой системы матрица $M(G(I))$ всегда невырождена, а значит (27) имеет решение.

Для обеспечения условия принадлежности $\vec{\omega}^{(0)}$ множеству решений Ω_2^1 выполняется соотношение

$$G(I)\vec{\omega}^{(0)} \subset \vec{c}^{(1)}(I),$$

задающее достаточное условие разрешимости системы (23), а значит, — и достаточное условие существования множества управляющих воздействий Ω_u^2.

Этап 2. В соответствии с выражением

$$H = \min_{G\in G(I)} \min_{1\le i\le n} \times$$
$$\times\left\{\left(W(c_i^{(1)}) - 2\left|M(c_i) - \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\omega_j^{(0)}\right|\right) \Big/ \sum_{j=1}^{n}\left|g_{ij}\right|\right\},$$

где $W(c_i^{(1)})$, $M(c_i^{(1)})$ — ширина и центр i-й составляющей вектора $\vec{c}^{(1)}(I)$; $\omega_j^{(0)}$ — j-я составляющая вектора $\vec{\omega}^{(0)}$ из (27); g_{ij} — (i, j)-й элемент матрицы G, рассчитаем оптимальную ширину H интервального вектора $\vec{\omega}(I)$, т. е. оптимальный размер области Ω_2^1.

В [15] показано, что

$$\min_{G\in G(I)}(\cdot)$$

достигается в вершинах прямоугольного параллелепипеда

$$P = [g_{i1}]\times[g_{i2}]\times\ldots\times[g_{in}],$$

поэтому для определения

$$\min_{G\in G(I)}(\cdot)$$

требуется перебрать 2^n вершин параллелепипеда.

Этап 3. Рассчитаем интервальный вектор $\vec{\omega}(I)$ или область Ω_2^1 в соответствии с выражением

$$\Omega_2^1 = \vec{\omega}(I) = [\vec{\omega}^{(0)} - 0{,}5H, \vec{\omega}^{(0)} + 0{,}5H].$$

Выводы

Показано, что для решения задачи оптимального управления линейной динамической системой с известными с точностью до интервалов параметрами:

● непосредственное применение интервальной арифметики некорректно, и целесообразно использование аппарата интервального анализа, позволяющего оперировать с именами переменных, а не только с их значениями;

● предпочтительными являются специальные формы матрицы состояния, что позволяет упростить и унифицировать алгоритмы управления, оставляя неизменными свойства решения, и получение которых возможно эквивалентными преобразованиями.

С использованием теоремы Харитонова о робастной устойчивости исследована устойчивость рассматриваемой системы и сформулированы необходимые и достаточные условия её устойчивости.

Определены понятие и условие управляемости системы, базирующиеся на выполнении требования управляемости для любых возможных значений элементов матрицы состояния.

Получено множество управляющих воздействий, гарантирующих для каждого возможного значения матрицы состояний наличие единственного управляющего воздействия, обеспечивающего решение задачи. Любое решение из заданного множества позволяет получить управляющее воздействие, гарантирующее решение задачи только для одного конкретного набора возможных значений параметров системы. Установлено, что данное множество всегда непустое и является в общем случае невыпуклым, представляющим объединение конечного числа выпуклых многогранников. Доказана теорема, переводящая решение данной задачи в решение системы линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами.

Продемонстрировано, что при наличии интервальной неопределенности на параметры объекта нецелесообразно говорить о решении задачи в том смысле, в котором оно понимается при точно известных параметрах. В этой связи сформулирована задача определения множества управляющих воздействий, каждое управление из которого гарантирует заданную точность решения для любых возможных значений параметров системы из условия обеспечения принадлежности конечного состояния системы заданному исследователем множеству конечных состояний.

Решение данной задачи сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами и представляет собой выпуклый многогранник. Выведены необходимые и достаточные условия существования такого решения.

Для полученного множества управляющих воздействий разработан алгоритм определения его прямоугольного многогранного подмножества максимального объема, сужающего множество гарантированных решений, но, в то же время, делающего множество гарантированных решений наглядным и легко применимым в практических задачах.

Литература

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.

2. **Иванов В.А., Фалдин Н.В.** Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1881.

3. **Сю. Д., Мейер А.** Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972.

4. **Афанасьев В.Н.** Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование. М.: Изд-во МИЭМ, 2007.

5. **Моисеев Н.Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.

References

1. **Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V.** Optimal'noe Upravlenie. M.: Fizmatlit, 2005. (in Russian).

2. **Ivanov V.A., Faldin N.V.** Teoriya Optimal'nykh Sistem Avtomaticheskogo Upravleniya. M.: Nauka, 1881. (in Russian).

3. **Syu. D., Meyer A.** Sovremennaya Teoriya Avtomaticheskogo Upravleniya i ee Primenenie. M.: Mashinostroenie, 1972. (in Russian).

4. **Afanas'ev V.N.** Optimal'nye Sistemy Upravleniya. Analiticheskoe Konstruirovanie. M.: Izd-vo MIEM, 2007. (in Russian).

5. **Moiseev N.N.** Elementy Teorii Optimal'nykh Sistem. M.: Nauka, 1975. (in Russian).

6. **Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.** Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

7. **Понтрягин Л.С.** Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во URSS, 2019.

8. **Скибицкий Н.В., Севальнев Н.В.** Интервальные модели в задачах оптимального управления с дифференциальными связями // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. № 11. С. 66—73.

9. **Вощинин А.П.** Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. № 1. С. 118—126.

10. **Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.** Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ, 1989.

11. **Шарый С.П.** Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3. № 2. С. 67—114.

12. **Шарый С.П.** Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 4. С. 82—110.

13. **Алефельд Г., Херцберг Ю.** Введения в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

14. **Скибицкий Н.В., Чекавинская Я.С.** Преобразование модели системы управления в условиях интервальной неопределенности // Вестник МЭИ. 2012. № 1. С. 91—96.

15. **Скибицкий Н.В., Тянь Юйпин.** Управление линейным динамическим объектом в условиях интервальной неопределенности на параметры задачи // Заводская лаборатория. 1993. № 3. С. 71—74.

16. **Харитонов В.Л.** Об асимптотической устойчивости положения семейства линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086—2088.

17. **Косарева Л.Л., Скибицкий Н.В.** Решение задачи терминального управления линейным объектом в условиях интервальной неопределённости // Вестник МЭИ. 2018. № 1. С. 91—97.

18. **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

19. **Шарый С.П.** Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: автореф. дис. … доктора физ.-мат. наук. Новосибирск: Изд-во Института вычислительных технологий Сибирского Отделения РАН, 2000.

20. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Изд-во «XYZ», 2013.

6. **Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N.** Variatsionnoe Ischislenie i Optimal'noe Upravlenie. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2006. (in Russian).

7. **Pontryagin L.S.** Printsip Maksimuma v Optimal'nom Upravlenii. M.: Izd-vo URSS, 2019. (in Russian).

8. **Skibitskiy N.V., Seval'nev N.V.** Interval'nye Modeli v Zadachakh Optimal'nogo Upravleniya s Differentsial'nymi Svyazyami. Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov. 2015;11:66—73. (in Russian).

9. **Voshchinin A.P.** Interval'nyy Analiz Dannykh: Razvitie i Perspektivy. Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov. 2002;1:118—126. (in Russian).

10. **Voshchinin A.P., Sotirov G.R.** Optimizatsiya v Usloviyakh Neopredelennosti. M.: Izd-vo MEI, 1989. (in Russian).

11. **Sharyy S.P.** Algebraicheskiy Podkhod vo «Vneshney Zadache» dlya Interval'nykh Lineynykh Sistem. Vychislitel'nye Tekhnologii. 1998;3;2:67—114. (in Russian).

12. **Sharyy S.P.** Vneshnee Otsenivanie Obobshchennykh Mnozhestv Resheniy Interval'nykh Lineynykh Sistem. Vychislitel'nye Tekhnologii. 1999;4;4:82—110. (in Russian).

13. **Alefel'd G., Khertsberg Yu.** Vvedeniya v Interval'nye Vychisleniya. M.: Mir, 1987. (in Russian).

14. **Skibitskiy N.V., Chekavinskaya Ya.S.** Preobrazovanie Modeli Sistemy Upravleniya v Usloviyakh Interval'noy Neopredelennosti. Vestnik MEI. 2012;1:91—96. (in Russian).

15. **Skibitskiy N.V., Tyan' Yuypin.** Upravlenie Lineynym Dinamicheskim Ob′ektom v Usloviyakh Interval'noy Neopredelennosti na Parametry Zadachi. Zavodskaya Laboratoriya. 1993;3:71—74. (in Russian).

16. **Kharitonov V.L.** Ob Asimptoticheskoy Ustoychivosti Polozheniya Semeystva Lineynykh Differentsial'nykh Uravneniy. Differentsial'nye Uravneniya. 1978;14;11: 2086—2088. (in Russian).

17. **Kosareva L.L., Skibitskiy N.V.** Reshenie Zadachi Terminal'nogo Upravleniya Lineynym Ob′ektom v Usloviyakh Interval'noy Neopredelennosti. Vestnik MEI. 2018;1:91—97. (in Russian).

18. **Kalmykov S.A., Shokin Yu.I., Yhldashev Z.Kh.** Metody Interval'nogo Analiza. Novosibirsk: Nauka, 1986. (in Russian).

19. **Sharyy S.P.** Interval'nye Algebraicheskie Zadachi i Ikh Chislennoe Reshenie: Avtoref. Dis. … Doktora Fiz.-mat. Nauk. Novosibirsk: Izd-vo Instituta Vychislitel'nykh Tekhnologiy Sibirskogo Otdeleniya RAN, 2000. (in Russian).

20. **Sharyy S.P.** Konechnomernyy Interval'nyy Analiz. Novosibirsk: Izd-vo «XYZ», 2013. (in Russian).

Сведения об авторе:

Скибицкий Никита Васильевич — доктор технических наук, профессор кафедры управления и интеллектуальных технологий НИУ «МЭИ», e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

Information about author:

Skibitsky Nikita V. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Control and Intelligent Technologies Dept., NRU MPEI, e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

Статья поступила в редакцию: *31.03.2021*
The article received to the editor: *31.03.2021*