

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ (05.13.01)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ (05.13.18)

УДК 621.396

DOI: 10.24160/1993-6982-2020-6-101-109

Вероятностный анализ требований к угломерной системе обнаружения смещения эллиптической орбиты

Ю.А. Горлицкий, Д.Г. Тигетов, Е.В. Китова

Поставлен вопрос о требованиях к угломерной системе, предназначенной для обнаружения смещения орбиты космического тела (КТ), которая в дискретные моменты времени измеряет углы со случайной погрешностью. Рассмотрены две статистические гипотезы о нулевой и заданной ненулевой величинах смещения. Получена статистика отношения правдоподобия, и для нее определено информационное расстояние, характеризующее уровень достоверности различения и зависящее от точности σ и дискретности Δt измерителя, а также от параметров орбиты. Задавая орбиты и уровнем достоверности различения, через информационное расхождение достигнута точность σ и дискретность Δt .

Информационное расхождение вычисляется на семействе неблагоприятных для наблюдателя орбит, плоскость которых касается орбиты движущегося наблюдателя, и точка касания является точкой пересечения соответствующих траекторий.

Для уточнения информационного расстояния обоснована простая плоская приближенная модель движения-измерения, в которой истинное движение наблюдателя (вне плоскости орбиты КТ) без изменения его скорости заменяется движением в плоскости орбиты КТ по окружности земной сферы. Обоснование подтверждено вычислением погрешностей. На простой модели оценивается потенциальная возможность обнаружения заданного смещения.

Даны таблицы и графики для практической оценки дискретности и точности системы. В приложении расположены все формулы, необходимые для проведения аналогичных расчетов.

Примеры показывают, что по угловым измерениям возможно получение вполне достоверного обнаружения для практически интересного диапазона параметров орбит.

Ключевые слова: эллиптические и неблагоприятные орбиты, угловые измерения, обнаружение смещения, информационное расхождение, уравнения движения, двумерная модель.

Для цитирования: Горлицкий Ю.А., Тигетов Д.Г., Китова Е.В. Вероятностный анализ требований к угломерной системе обнаружения смещения эллиптической орбиты // Вестник МЭИ. 2020. № 6. С. 101—109. DOI: 10.24160/1993-6982-2020-6-101-109.

Probabilistic Analysis of the Requirements for an Elliptical Orbit Displacement Goniometric Detection System

Yu.A. Goritskiy, D.G. Tigetov, E.V. Kitova

The article addresses the requirements for a goniometric system intended to detect displacements of the space body orbit, which measures angles at discrete moments of time with a random error. Two statistical hypotheses about the zero and specified nonzero displacement values are considered. The likelihood ratio statistics is obtained, and the information distance for it is determined, which characterizes the discrimination confidence level, and which depends on the measurement device accuracy σ and discreteness Δt , and also on the orbit parameters. By specifying the orbits and discrimination confidence level, the accuracy σ and discreteness Δt are determined through information discrepancy.

The information discrepancy is calculated on a family of orbits unfavorable for the observer, the plane of which touches the orbit of the moving observer, and the touching point is the intersection point of the corresponding trajectories.

To refine the information distance, a simple flat approximate motion-measurement model is substantiated, in which the true motion of the observer (outside the space body orbit plane) is replaced, without changing its speed, by motion in the space body orbit plane over the

earth's sphere circumference. The justification is corroborated by calculating the errors. The obtained simple model is used for estimating the potential possibility of detecting the specified displacement.

Tables and graphs for practically determining the discreteness and accuracy of the system are given. The appendix contains all formulas necessary for carrying out similar calculations.

Examples show that from angular measurements it is possible to obtain quite reliable detection for the range of orbit parameters that are of practical interest.

Key words: elliptical and unfavorable orbits, angular measurements, displacement detection, information discrepancy, equations of motion, 2D model.

For citation: Goritskiy Yu.A., Tigetov D.G., Kitova E.V. Probabilistic Analysis of the Requirements for an Elliptical Orbit Displacement Goniometric Detection System. Bulletin of MPEI. 2020;6:101—109. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2020-6-101-109.

Введение

Изучен вопрос о требованиях к угломерной системе, предназначенной для достоверного обнаружения заданной величины смещения орбиты космического тела (КТ). С дискретностью Δt по времени измерены углы со случайной погрешностью σ . Задача состоит в определении требований к точности и дискретности при заданном диапазоне возможных параметров орбит.

Изучаемая проблема связана с задачей оценки параметров орбит космических тел. Она не является новой, [1— 7], однако с изменением целей обработки, технических средств измерения, требований к точности и вычислительных возможностей, приобретает различные особенности.

Простые алгоритмы оценивания [1, 3] основаны на построении точечной оценки состояния КТ в фиксированный момент времени. Начальную оценку угловых величин получают регрессией угловых измерений с использованием полиномов. Оценки радиальных величин находят как корни трансцендентных уравнений орбитального движения, связывающих радиальные и угловые величины. Полученную оценку используют в качестве начального приближения в различных методах уточнения, базирующихся на нелинейном методе наименьших квадратов. В частности, в [1] использована линеаризация функции преобразования состояний КТ, приводящая к итерационному алгоритму наименьших квадратов, а в [3] описан градиентный метод оптимизации. В [5] изложен альтернативный подход, связанный с аппроксимацией апостериорной плотности вероятности состояния КТ, получаемой при аппроксимации априорной плотности вероятности состояния КТ и функции преобразования состояния [8 — 10].

Анализ эффективности измерительной информации обычно связывают с информационным неравенством Рао-Крамера, [1, 11 — 13], основанном на вычислении матрицы Фишера. При обнаружении смещения данный подход не позволяет определить требования к измерителю.

В настоящей работе при оценке эффективности измерительной информации использована информация по Кульбаку [14]. Сравнивая измерения по орбитам без смещения и со смещением, найдем информационное расхождение, характеризующее уровень достоверности при различении гипотез. Затем выбором точности и дискретности достигнем нужного уровня различающей способности. Для численного расчета орбит КТ

взято дифференциальное уравнение, представляющее второй закон Кеплера.

Требования к измерительной системе

Предположим, что измерениями являются угол места и азимут. На практике особо выделяют класс траекторий, направленных в сторону наблюдателя, для которых весьма характерными являются малые изменения азимута. Это обстоятельство имеет место в тех случаях, когда движение наблюдателя, обусловленное вращением Земли, проходит вблизи плоскости орбиты. В этих случаях задачу можно приближенно считать двумерной, перенося движение наблюдателя на плоскость орбиты, а единственный источник информации в данном случае — измерения угла места. Ситуации с малыми изменениями азимута интересны также тем, что они наименее благоприятны для задач обнаружения, а также оценки параметров движения, и потому их анализ может стать ориентиром для использования угловых измерительных систем.

Пусть наблюдениями $x = (x_1, \dots, x_n)$ являются углы места:

$$x_i = \varepsilon(t_i) = \varepsilon(\theta(t_i), p, e, \Delta), \quad i = 1, \dots, n,$$

т. е. функции аномалии $\theta(t_i)$ движения КТ в момент t_i , параметров (p, e) орбиты (p — фокальный параметр; e — эксцентриситет); Δ — смещения орбиты по отношению к наблюдателю в момент приземления,

$$\varepsilon(t_i) = \varepsilon(\theta(t_i), p, e, \Delta).$$

По наблюдениям следует принять одно из двух решений: мало смещение или не мало.

При анализе требований к системе положим, что измерительная информация должна на заданном уровне достоверности (для заданных вероятностей первого и второго родов) обеспечивать различение двух статистических гипотез: $H_0: \Delta = 0$ при альтернативе $H_1: \Delta = \Delta^*$ — заданной величины смещения, которую необходимо найти. Положим, что углы $\varepsilon(t_i)$ измеряются со случайными погрешностями, нормально распределенными (со средним 0 и дисперсией σ^2) и независимыми. Обозначим:

$$\begin{aligned} a_i &= M(x_i | H_0) = \varepsilon(\theta(t_i), p, e, \Delta = 0); \\ b_i &= M(x_i | H_1) = \varepsilon(\theta(t_i), p, e, \Delta = \Delta^*), \end{aligned} \quad (1)$$

где M — символ математического ожидания.

Не трудно проверить, что решающей статистикой отношения правдоподобия $\ln[p(x|H_1)/p(x|H_0)]$ является сумма $S_1 = \sum_i x_i(b_i - a_i)$. Если из нее вычесть

$$M(S_1 | H_0) = \sum_i a_i(b_i - a_i), \text{ то получим статистику}$$

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)(b_i - a_i), \quad (2)$$

более удобную, чем S_1 , в том смысле, что

$$M(S | H_0) = 0;$$

$$M(S | H_1) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = \sum_i (\Delta\varepsilon_i)^2 = C_n, \quad (3)$$

где C_n — обозначение суммы, $\Delta\varepsilon_i = (b_i - a_i)$, причем обе дисперсии одинаковы:

$$D(S | H_0) = D(S | H_1) =$$

$$= \sigma^2 \sum_i (b_i - a_i)^2 = \sigma^2 \sum (\Delta\varepsilon_i)^2 = \sigma^2 C_n. \quad (4)$$

Таким образом, задача сводится к различению нормальных распределений.

Заметим, что в силу (3)

$$\Delta C_n = \Delta t \sum_i (\Delta\varepsilon_i)^2 \approx$$

$$\approx \int_0^{T-\tau} [\varepsilon_2(t) - \varepsilon_1(t)]^2 dt = \|\Delta\varepsilon\|^2,$$

где $\Delta t = (T - \tau)/n$, T — время наблюдения до момента приземления; τ — время, необходимое на реакцию потребителя на решение о значении смещения (данная величина уменьшает время наблюдения и потому ухудшает характеристики обнаружения.

Из (5) получим:

$$C_n \approx \frac{\|\Delta\varepsilon\|^2}{\Delta t}. \quad (6)$$

Качество различения нормальных распределений определяется отношением разности в математических ожиданиях к стандартному отклонению, т. е. величиной, которая с учетом (3) — (6) выглядит как:

$$\gamma = \frac{M(S|H_1)}{\sqrt{DS}} = \frac{C_n}{\sqrt{\sigma^2 C_n}} = \frac{\sqrt{C_n}}{\sigma} = \frac{\|\Delta\varepsilon\|}{\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (7)$$

Если $\gamma = 5$, то при равных вероятностях α и β первого и второго родов получится $\alpha = \beta = 1 - \Phi(\gamma/2) \approx 0,006$, ($\Phi(\cdot)$ — функция распределения нормального закона).

По значениям параметров p, y, Δ^*, τ определим $\|\varepsilon\|$ по (5). Затем из (7) при фиксированном γ ($\gamma = 5$) найдем значение параметра измерителя $g(p, e) = \sigma\sqrt{\Delta t}$, зависящее от данных орбиты и задаваемых величин Δ^* и τ :

$$g(p, e) = \sigma\sqrt{\Delta t} = \frac{\|\Delta\varepsilon\|}{\gamma} = f(p, e; \Delta^*, \tau), \quad (8)$$

где Δ^* — определяемая величина смещения.

В результатах расчетов даны значения g при $\Delta^* = 500$ м и $\tau = 20, 30$ и 50 с.

Параметр $g = \sigma\sqrt{\Delta t}$ измерительной системы при заданных Δ^* и τ получим из (8), как функцию орбитальных параметров (V, α) (V — скорость; α — угол в момент приземления), более удобных, чем (p, e) и однозначно связанных с ними (Приложение А). По вычисленному значению $g(V, \alpha)$ орбиты и фиксированным значениям Δ^*, τ найдем g , по которому подбираются точность σ , дискретность Δt измерений и, соответственно, их частота.

Модель движения-измерения

Предварительная схема: неподвижный наблюдатель.

Рассматриваются наименее благоприятные орбиты, когда движение наблюдателя, связанное с вращением Земли, проходит вблизи плоскости орбиты, и задачу можно приближенно считать двумерной, перенося движение наблюдателя на плоскость орбиты. Предположим, что наблюдатель (точка Н, рис. 1) располагается в плоскости орбиты и неподвижен. Ниже учтено влияние движения вне этой плоскости.

Объект движется по эллипсу, главная ось которого составляет угол φ относительно направления на точку Н наблюдения. Орбита характеризуется трехмерным параметром (φ, p, e) , где φ — угол между наблюдателем Н и главной осью эллипса; p — фокальный параметр; e — эксцентриситет орбиты.

Уравнение орбиты в полярных координатах:

$$r(\theta) = p/(1 - e \cos \theta), \quad (9)$$

где $r(\theta)$ — расстояние до центра Земли, функция θ ; θ — истинная аномалия (угол направления на объект, отсчитываемый от направления на апогей).

Для произвольного момента t значение $\theta(t)$ при известных параметрах орбиты p и e получим по дифференциальному уравнению (второму закону Кеплера о постоянстве секториальной скорости):

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\theta; p, e), \quad (10)$$

где

$$\omega(\theta; p, e) = \sqrt{p\mu}/r^2 = \left(\sqrt{\mu}/p^{3/2}\right)(1 - e \cos \theta)^2$$

— угловая скорость; $\mu = 3,9860044 \cdot 10^{14}$ — геоцентрическая гравитационная постоянная, $\text{м}^3/\text{с}^2$; $t = t_0$, $\theta = \theta_0$ — начальное условие.

Измерения угла места начинаются после момента t_0 входа в зону видимости, т. е. когда объект выходит из-за горизонта G . Угол места $\varepsilon = \varepsilon(t)$ в любой момент $t \geq t_0$ определяется соотношением, что тангенс угла есть отношение катетов (см. рис. 1):

$$\text{tg}(\varepsilon) = \frac{r(\theta) \cos(\varphi - \theta) - R_3}{r(\theta) \sin(\varphi - \theta)} =$$

$$\text{ctg}(\varphi - \theta) - \frac{R_3(1 - e \cos \theta)}{p \sin(\varphi - \theta)}, \quad (11)$$

где $\theta = \theta(t)$ — аномалия в момент измерения t .

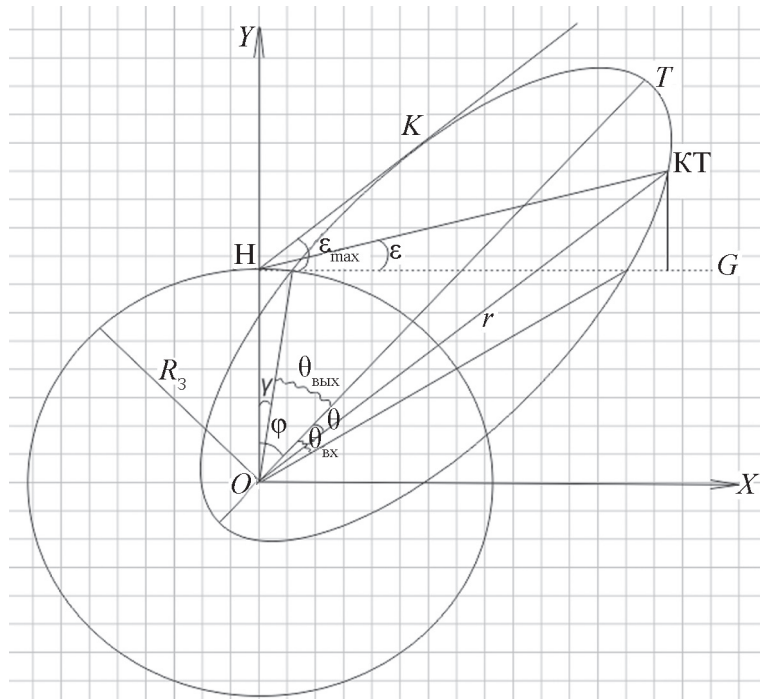


Рис. 1. Схема плоской задачи

Соотношения (9) — (11) определяют угол ε , как функцию $\theta = \theta(t)$ и параметры φ, p, e :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\theta(t), \varphi, p, e).$$

Наблюдения начинаются с некоторого угла ε_0 (например, с угла $\varepsilon_0 = 0$ выхода из-за горизонта), по которому по параметрам (φ, p, e) находится соответствующее аномалии θ_0 (путем решения (11), сводимое к квадратному (Приложение В)):

$$\theta_0 = h(\varepsilon_0; \varphi, p, e).$$

Учет движения наблюдателя, обусловленного вращением Земли.

Из-за вращения Земли наблюдатель движется по окружности вдоль своей параллели. Будем называть траекторию КТ неблагоприятной для измерителя, если плоскость орбиты КТ касается параллели, по которой движется измеритель, и точка касания является общей точкой (точкой пересечения) для соответствующих траекторий, характеризующихся, во-первых, малым диапазоном измеряемых азимутальных углов, так что измерения азимута можно пренебречь. Во-вторых, диапазон изменения угла места на последнем участке движения (наиболее информативном) минимален (траектория входит в точку O наблюдения). Таким образом, траектория КТ неблагоприятна, если в момент приземления вектор скорости наблюдателя лежит в плоскости орбиты. Формально это означает, что в (11) $\varphi = \theta_f$, где θ_f — финальная аномалия (Приложение В).

Если реверсировать время, то можно считать неблагоприятными для измерителя траектории, исходя-

щие из точки наблюдения, и орбитальная плоскость проходит через вектор скорости наблюдателя. В этом случае взаимное движение выглядит следующим образом: из точки касания O одновременно начинаются два движения: наблюдатель перемещается по окружности-параллели с широтой φ_H , касаясь плоскости орбиты, а КТ — в орбитальной плоскости.

Существует фиктивное движение измерителя (по окружности земной сферы S_3 в орбитальной плоскости), эквивалентное (в смысле получения углов места) истинному движению (вне орбитальной плоскости). Для этого достаточно, чтобы в любой момент времени два расстояния от КТ до фиктивного и истинного движения были одинаковы. С помощью эквивалентного фиктивного движения $\Delta\varphi(t)$ задача сводится к плоской. Однако, фиктивное эквивалентное движение зависит от точки расположения КТ.

Построим приближенно эквивалентное движение, независимое от КТ. Заменим равномерное движение наблюдателя вдоль своей параллели движением по окружности S_3 сферы в орбитальной плоскости, сохранив его линейную скорость $\omega_3 R_3 \cos \varphi_H$. Заметим, что для экватора $\varphi_H = 0$, и на северном полюсе $\varphi_H = \pi/2$, это фиктивное движение является эквивалентным.

Оценим приближение. Оба движения, истинное и фиктивное, приходят одновременно в общую точку O . Найдем разность длин двух отрезков, исходящих из точки КТ на истинную и фиктивную траектории. Если длины в любой момент одинаковы $\Delta d = 0$, то углы места равны. Если они не одинаковы $\Delta d \neq 0$, то оценим величины погрешности $\Delta\varepsilon(t; d, \varepsilon) \approx (\Delta d/d) \operatorname{tg} \varepsilon$ измеря-

мого угла места или сдвига $\Delta l(t, d, \varepsilon) \approx \Delta d / \cos \varepsilon$ фиктивного наблюдателя, приводящего к углу места, равного истинному (рис. 2). Необходимые формулы [15] даны в Приложении С. В таблице 1 в каждой клетке указаны расчетные значения Δl и $\Delta \varepsilon$, зависящие от расположения КТ (угла ε и дальности d) и времени t движения до точки O . Значение широты наблюдателя — $\varphi_H = 60^\circ$.

Значения табл. 1 показывают, что смещение $\Delta l(t, \varepsilon, d)$ относительно эквивалентных точек меньше 5 метров в диапазонах времени от 0 до 300 с и угла от 0 до 72° при дальностях от 100 до 600 км. Если Δl перевести в погрешность $\Delta \varepsilon$ по углу места, то за 300 с до прихода в точку O при дальности 300 км и $\varepsilon = 48^\circ$ — $\Delta l = 3,84$ м, что означает $\Delta \varepsilon = 0,33'$, что меньше среднеквадратического отклонения измерения в сотни раз.

Фиктивное движение учитывается тем, что к φ в (10) добавляется линейно изменяющаяся во времени (со скоростью $\omega_3 \cos \varphi_H$) составляющая $\Delta \varphi(t)$, $\Delta \varphi(t) = \pm \omega_3 \cos \varphi_H (T - t)$, T — момент приземления, причем $\Delta \varphi T = 0$. С учетом неблагоприятных орбит и смещения Δ параметр φ становится равным $\varphi = \theta_j \pm \omega_3 \cos \varphi_H (T - t) + \Delta / R_3$.

Результаты расчетов

В таблице 2 приведены расчетные значения параметра качества g , определенного (8), для неблагоприятных орбит с различными скоростями V — от 1 до 5 км/с, углов падения α — от 12 до 60° и времени τ реакции потребителя — 20, 30 и 50 с. Значение смещения $\Delta^* = 500$ м. Данные указаны для неподвижного наблюдателя, влияние его движения описано в табл. 3 в двух направлениях.

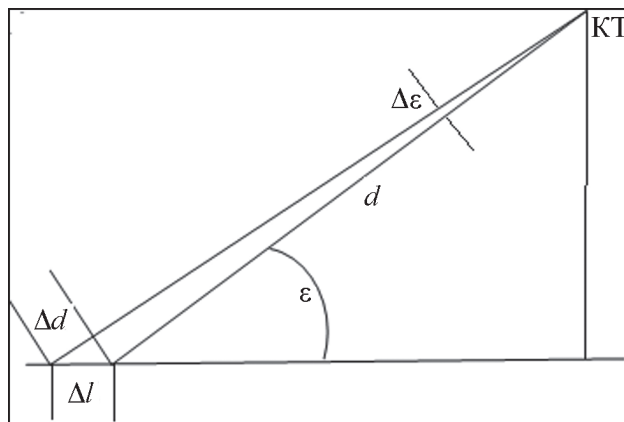


Рис. 2. Связь между Δd и $\Delta \varepsilon$

Таким образом, в рассматриваемом диапазоне параметров орбит g меняется от $0,75 \cdot 10^{-3}$ (при $V = 5$ км/с, $\alpha = 12^\circ$) до $27 \cdot 10^{-3}$ (при $V = 1$ км/с, $\alpha = 60^\circ$).

На рисунке 3 продемонстрирована зависимость дискретности Δt (в секундах) от точности σ в радианах ($0,01$ рад. $\approx 35'$) при различных значениях $g = 10^{-3}$ (1, 2, 3, 6, 9, 12, 15). Так, если нужно за $\tau = 30$ с до приземления обнаружить смещение $\Delta^* = 500$ м объекта со скоростью $V = 3$ км/с и углом $\alpha = 48^\circ$, то, определив по табл. 2 значение $g = 8,0$, по данным рис. 3 при среднеквадратическом отклонении $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ ($\approx 15'$) получим, линейно интерполируя между $g = 6$ и 9, значение дискретности $\Delta t \approx 4$ с. Если же $\alpha = 24^\circ$ и $V = 4$ км/с, то $g = 2,7$, тогда при точности $\sigma \approx 7'$ необходимая дискретность составит $\Delta t \approx 2$ с.

Таблица 1

Значения Δl , м (верхнее) и $\Delta \varepsilon$, ' (нижнее)

t, с	ε, °	d, км			
		100	300	600	1000
100	12	0,13, 0,001	0,15, 0,0004	0,15, 0,0002	0,15, 0,0002
	48	0,14, 0,0036	0,15, 0,001	0,15, 0,0006	0,15, 0,0004
	72	0,17, 0,006	0,16, 0,002	0,16, 0,001	0,15, 0,0006
300	12	2,90, 0,021	3,70, 0,009	3,80, 0,005	3,90, 0,005
	48	3,35, 0,086	3,84, 0,033	3,98, 0,017	4,04, 0,01
	72	4,65, 0,152	4,46, 0,049	4,31, 0,023	4,23, 0,014
600	12	19,0, 0,136	25,0, 0,06	28,0, 0,033	30,0, 0,021
	48	23,0, 0,59	29,5, 0,25	30,6, 0,13	31,5, 0,08
	72	35,9, 1,17	36,8, 0,40	35,5, 0,19	34,5, 0,11

Таблица 2

Значения $g(V, \alpha)10^{-3}$ при $\Delta^* = 500$ м (неподвижный наблюдатель)

τ, c	$\alpha, ^\circ$	$V, \text{ км/с}$				
		1	2	3	4	5
20	12	5,50	2,76	1,65	1,08	0,75
	24	13,0	5,50	3,60	2,66	1,84
	36	17,5	8,00	5,50	4,70	3,34
	48	21,5	12,5	8,00	5,50	4,60
	60	27,0	16,0	9,50	7,00	6,00
30	12	3,30	1,90	1,70	1,10	0,75
	24	8,70	5,50	3,60	2,70	1,84
	36	17,5	8,00	5,60	3,70	3,30
	48	21,5	13,0	8,00	5,50	4,60
	60	27,0	16,0	9,50	7,00	5,80
50	12	1,40	1,90	1,24	0,85	0,75
	24	6,00	4,16	3,60	2,16	1,84
	36	13,0	8,00	5,50	3,70	3,30
	48	21,5	10,0	8,00	5,50	4,60
	60	27,0	12,5	9,50	7,00	6,00

Таблица 3

Значения $g(V, \alpha)10^{-3}$ при $\Delta^* = 500$ м (широта $\varphi_H = 60^\circ$)

τ, c	$\alpha, ^\circ$	$V, \text{ км/с}$				
		1	2	3	4	5
30	Движение КТ в одном направлении с наблюдателем					
	12	6,0	4,0	2,7	1,5	1,2
	24	15	7,0	4,1	3,2	2,6
	36	21	11	7,0	5,2	3,6
	48	34	12	8,6	6,7	5,5
	60	37	16	11	9,5	6,3
	Движение КТ навстречу наблюдателю					
	12	2,1	1,5	1,1	0,8	0,4
	24	6,7	3,7	2,6	1,9	1,3
	36	14	6,8	4,3	3,3	2,4
	48	18	9,6	7,2	4,7	4,2
	60	24	11	9,8	6,3	5,3

Для оценки влияния вращения Земли в табл. 3 даны значения параметра качества g с учетом движения наблюдателя в двух вариантах: при движении КТ навстречу наблюдателю и в одном направлении. Широта φ_H наблюдателя равна 60° (на этой широте скорость движения — приблизительно 230 м/с, что существенно меньше изучаемых скоростей).

Результаты показывают, что различие в направлении движения КТ сказывается, в основном, на низких орбитах, так что наиболее неблагоприятными (с точки зрения обнаружения смещения) орбитами являются те, что движутся с востока на запад.

Заключение

Анализ качества обнаружения заданного смещения орбиты опирается на несколько моментов.

Рассмотрены две гипотезы о величине смещения. Найдена статистика отношения правдоподобия, и для нее определено информационное расхождение, характеризующее качество различения. Оно зависит от орбит и параметров измерения: дискретности Δt и точности σ . Задаваясь уровнем достоверности различения, определяется параметр g измерителя, по которому подбираются точность σ измерения и дискретность Δt .

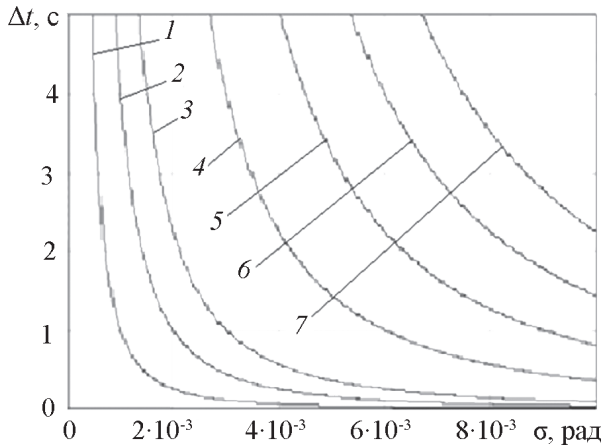


Рис. 3. Зависимость Δt от точности σ при различных g :
 1 — $1 \cdot 10^{-3}$; 2 — $2 \cdot 10^{-3}$; 3 — $3 \cdot 10^{-3}$; 4 — $6 \cdot 10^{-3}$; 5 — $9 \cdot 10^{-3}$; 6 — $12 \cdot 10^{-3}$; 7 — $15 \cdot 10^{-3}$ ($0,01 \text{ рад} \approx 35'$)

Выделено семейство неблагоприятных для наблюдателя орбит. Это орбиты, плоскость которых касается орбиты движущегося наблюдателя, и точка касания является точкой пересечения соответствующих траекторий. Расчеты выполнены для неблагоприятных орбит.

Обоснована простая приближенная плоская модель движения-измерения, в которой истинное движение наблюдателя (вне плоскости орбиты КТ) без изменения его скорости заменяется движением в плоскости орбиты КТ по окружности земной сферы. Обоснование сделано вычислением погрешностей. На модели оценена потенциальная возможность обнаружения заданного смещения.

Рассчитаны таблицы и графики для практического определения дискретности и точности измерительной системы. В приложениях представлены формулы, необходимые для проведения аналогичных расчетов.

Примеры показывают, что по угловым измерениям возможно получение вполне достоверного обнаружения для практически интересного диапазона параметров орбит.

Приложение А.

Формулы связи параметров (V, α) с (p, e)

Приведены формулы пересчета параметров (V, α) (скорости V и угла падения α) в параметры (p, e) — фокальный параметр и эксцентриситет.

Исходными соотношениями являются формулы для радиальной v_r и трансверсальной v_u составляющих:

$$v_r = \sqrt{\mu / p} \sin \theta;$$

$$v_u = \sqrt{\mu / p} (1 - e \cos \theta),$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_r}{v_u} = \frac{e \sin \theta}{1 - e \cos \theta} = \frac{x}{y},$$

где $x = e \sin \theta$; $y = 1 - e \cos \theta$; $x = y \operatorname{tg} \alpha$, причем $x^2 + (1 - y)^2 = e^2$.
 Условие пересечения орбиты со сферой:

$$\frac{p}{1 - e \cos \theta} = R_3,$$

тогда $y = p/R_3$; $x = y \operatorname{tg} \alpha = (p/R_3) \operatorname{tg} \alpha$.

Модуль скорости:

$$V^2 = v_r^2 + v_u^2 = (\mu/p)(x^2 + y^2);$$

$$x^2 + y^2 = \frac{p}{\mu} V^2; \left(\frac{p}{R_3} \operatorname{tg} \alpha \right)^2 + \left(\frac{p}{R_3} \right)^2 = \frac{p}{\mu} V^2.$$

После сокращения на p имеем:

$$\frac{p}{R_3^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = \frac{V^2}{\mu}.$$

тогда, с учетом $p/R_3 = p_R$, получим выражение для p и e через V и α :

$$p = \frac{R_3^2}{\mu} \frac{V^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1};$$

$$y = p_R; x = y \operatorname{tg} \alpha = p_R \operatorname{tg} \alpha;$$

$$e^2 = x^2 + (1 - y)^2 = (p_R \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - p_R)^2.$$

Приложение В.

Формула для начального значения аномалии

Начальное условие $\theta_0(\varepsilon_0, \varphi, p, e)$ найдем из (11), полагая известным значение ε_0 начального угла места. После умножения (11) на $\sin(\varphi - \theta)$, оно примет вид:

$$\sin(\varphi - \theta) \operatorname{tg}(\varepsilon) = \cos(\varphi - \theta) - (R_3/p)(1 - e \cos \theta).$$

Пусть $\varepsilon_0 = 0$, запишем $\cos(\varphi - \theta_0)$ через косинус суммы, введем неизвестное $x = \operatorname{tg}(\theta_0/2)$, через x выразим $\sin \theta_0$ и $\cos \theta_0$, и из полученного квадратного уравнения

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ где } A = a + c, B = -2b, C = c - a,$$

($a = \cos \varphi + e(R_3/p)$, $b = \sin \varphi$, $c = R_3/p$) получим решение:

$$\theta_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$

$$\theta_f = 2 \operatorname{arctg} \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

где θ_f — второй корень уравнения (финальная аномалия).

Приложение С.

Оценка погрешности угла места при фиктивном движении наблюдателя

На рисунке 4 O — точка начала системы (x, y, z) отсчета. Оси x и y находятся в плоскости орбиты, y на-

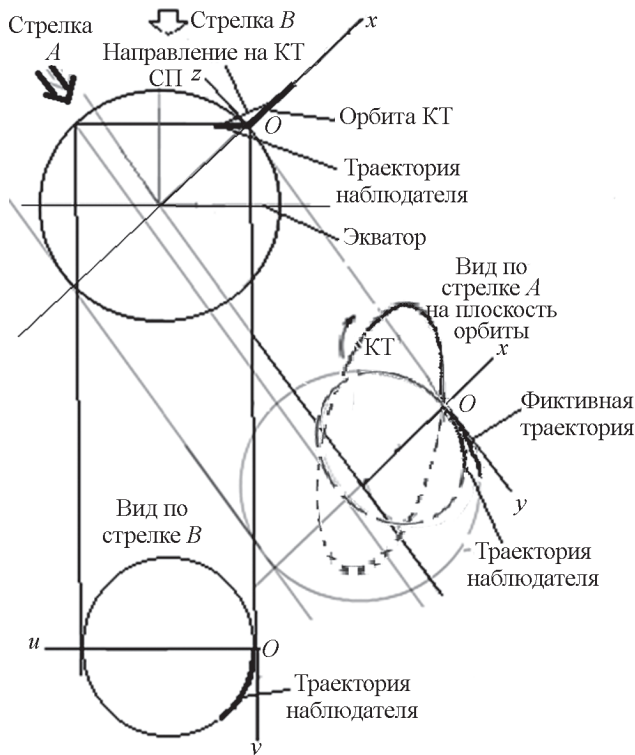


Рис. 4. Орбиты движений наблюдателя и КТ в трех проекциях

правлена вдоль вектора скорости V наблюдателя в точке O , z — ортогонально орбитальной плоскости.

Истинное движение наблюдателя.

В плоскости P_H движения наблюдателя в осях (u, y) ; t — время движения наблюдателя от точки O ; координаты (u_H, y_H) в момент t :

$$\begin{aligned} u_H(t) &= (R_3 \cos(\varphi_H))(1 - \cos(\omega_3 t)); \\ y_H(t) &= R_3 \cos(\varphi_H) \sin(\omega_3 t), \end{aligned}$$

где R_3, ω_3 — радиус Земли и угловая скорость.

Литература

1. Chang C.B. Optimal State Estimation of Ballistic Trajectories with Angle-only Measurements. Massachusetts: MIT Lincoln Laboratory, 1979.
2. Chang C.B., Tabaczynski J. Application of State Estimation to Target Tracking // IEEE Trans. Automatic Control. 1984. V. 29. No. 2. Pp. 98—109.
3. Саврасов Ю.С. Методы определения орбит космических объектов. М.: Машиностроение, 1981.
4. Саврасов Ю.С. Алгоритмы и программы в радиолокации. М.: Радио и связь, 1985.
5. Колесса А.Е., Пругло А.В., Равдин С.С. Восстановление орбит по угловым измерениям // Радиотехника. 2005. № 10. С. 5—9.
6. Булычев, В.Ю., Булычев Ю.Г., Ивакина С.С. Пассивная локация на основе угловых и мощностных

Координаты наблюдателя — вектор r_H в системе (x, y, z) :

$$r_H(t) = \begin{bmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \\ z_H(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_H \cos(\varphi_H) = -R_3 \cos^2(\varphi_H) [1 - \cos(\omega_3 t)] \\ (R_3 \cos(\varphi_H)) \sin(\omega_3 t) \\ u_H \sin(\varphi_H) = R_3 \sin(2\varphi_H) \cos(\omega_3 t) / 2 \end{bmatrix}.$$

Координаты КТ в момент t : вектор $r = (x, y, z = 0)^T$. Расстояние между КТ и наблюдателем:

$$d_H(t) = |r - r_H(t)|.$$

Фиктивное движение наблюдателя.

Пусть $\omega_f = \omega_3 \cos \varphi_H$ — угловая скорость фиктивного движения, а вектор координат:

$$r_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_3 (1 - \cos(\omega_f t)) \\ R_3 \sin(\omega_f t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Расстояние между КТ и фиктивным наблюдателем:

$$d_f(t) = |r - r_f(t)|.$$

Разность расстояний:

$$\Delta d(t) = d_f(t) - d_H(t) = d_H(t),$$

где t — время движения наблюдателя от точки O ; (d, ε) — дальность и угол места из точки O (координаты КТ).

Если $\Delta d(t) = 0$, то погрешность $\Delta \varepsilon(t) = 0$. Если $\Delta d(t) \neq 0$, то погрешность оценивается величиной (см. рис. 2) $\Delta \varepsilon(t; d, \varepsilon) \approx (\Delta d/d) \operatorname{tg} \varepsilon$, а также расстоянием сдвига $\Delta l(t; d, \varepsilon) \approx \Delta d / \cos \varepsilon$, при котором $\Delta \varepsilon = 0$.

References

1. Chang C.B. Optimal State Estimation of Ballistic Trajectories with Angle-only Measurements. Massachusetts: MIT Lincoln Laboratory, 1979.
2. Chang C.B., Tabaczynski J. Application of State Estimation to Target Tracking. IEEE Trans. Automatic Control. 1984;29;2:98—109.
3. Savrasov Yu.S. Metody Opredeleniya Orbit Kosmicheskikh Ob'ektov. M.: Mashinostroenie, 1981. (in Russian).
4. Savrasov Yu.S. Algoritmy i Programmy v Radiolokatsii. M.: Radio i Svyaz', 1985. (in Russian).
5. Kolessa A.E., Pruglo A.V., Ravdin S.S. Vosstanovlenie Orbit po Uglovym Izmereniyam. Radiotekhnika. 2005;10:5—9. (in Russian).
6. Bulychev, V.Yu., Bulychev Yu.G., Ivakina S.S. Pассивная Lokatsiya na Osnove Uglovykh i Moshch-

измерений системы пеленгаторов // Известия РАН. Серия «Теория и системы управления». 2014. № 1. С. 65—73.

7. Булычев В.Ю. и др. Угломерно-энергетический метод нестационарной пассивной локации на базе однопозиционной системы // Известия РАН. Серия «Теория и системы управления». 2015. № 5. С. 122—136.

8. Коlessa А.Е. Рекуррентные алгоритмы фильтрации для некоторых систем с нелинейностями кусочно-линейного типа // Автоматика и телемеханика. 1986. № 5. С. 61—69.

9. Коlessa А.Е. Некоторые прикладные вопросы кусочно-линейной фильтрации // Автоматика и телемеханика. 1986. № 6. С. 61—69.

10. Коlessa А.Е. Точные формулы оптимальной фильтрации для нестационарной кусочно-линейной задачи оценивания параметра // Автоматика и телемеханика. 1989. № 12. С. 69—80.

11. Farina A., Benvenuti D., Ristic B. Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst. 2002. V. 38. No. 3. Pp. 854—867.

12. Farina A., Ristic B., Timmoneri L. Cramer-Rao Bound for Nonlinear Filtering with $Pd < 1$ and Its Application to Target Tracking // IEEE Trans. Signal Proc. 2002. V. 50. No. 8. Pp. 1916—1924.

13. Ristic B., Farina A., Benvenuti D., Arulampalam M.S. Performance Bounds and Comparison of Nonlinear Filters for Tracking a Ballistic Object on Re-entry // IEEE Proc. Radar, Sonar and Navigation. 2003. V. 150. No. 2. Pp. 65—70.

14. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967.

15. Tigetov D., Goritskiy Y., Anufriev A. Two-dimensional Model for Cramer-Rao Bounds of Angular Measurements on Elliptical Orbits // Proc. Intern. Russian Automation Conf. Sochy, 2019. Pp. 1—5.

nostnykh Izmereniy Sistemy Pelengatorov. Izvestiya RAN. Seriya «Teoriya i Sistemy Upravleniya». 2014;1:65—73. (in Russian).

7. Bulychev V.Yu. i dr. Ugloverno-energeticheskiy Metod Nestatsionarnoy Passivnoy lokatsii na Baze Odno-pozitsionnoy Sistemy. Izvestiya RAN. Seriya «Teoriya i Sistemy Upravleniya». 2015;5:122—136. (in Russian).

8. Kolessa A.E. Rekurrentnye Algoritmy Fil'tratsii dlya Nekotorykh Sistem s Nelineynostyami Kusochno-lineynogo Tipa. Avtomatika i Telemekhanika. 1986;5:61—69. (in Russian).

9. Kolessa A.E. Nekotorye Prikladnye Voprosy Kusochno-lineynoy Fil'tratsii. Avtomatika i Telemekhanika. 1986;6:61—69. (in Russian).

10. Kolessa A.E. Tochnye Formuly Optimal'noy Fil'tratsii dlya Nestatsionarnoy Kusochno-lineynoy Zadachi Otsenivaniya Parametra. Avtomatika i Telemekhanika. 1989;12:69—80. (in Russian).

11. Farina A., Benvenuti D., Ristic B. Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst. 2002;38;3:854—867.

12. Farina A., Ristic B., Timmoneri L. Cramer-Rao Bound for Nonlinear Filtering with $Pd < 1$ and Its Application to Target Tracking. IEEE Trans. Signal Proc. 2002;50;8:1916—1924.

13. Ristic B., Farina A., Benvenuti D., Arulampalam M.S. Performance Bounds and Comparison of Nonlinear Filters for Tracking a Ballistic Object on Re-entry. IEEE Proc. Radar, Sonar and Navigation. 2003;150;2:65—70.

14. Kul'bak S. Teoriya Informatsii i Statistika. M.: Nauka, 1967. (in Russian).

15. Tigetov D., Goritskiy Y., Anufriev A. Two-dimensional Model for Cramer-Rao Bounds of Angular Measurements on Elliptical Orbits. Proc. Intern. Russian Automation Conf. Sochy, 2019:1—5.

Сведения об авторах:

Горицкий Юрий Александрович — доктор технических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: goritskiy@yandex.ru

Тигетов Давид Георгиевич — кандидат технических наук, начальник сектора Московского радиотехнического института, e-mail: David.Tigetov@gmail.com

Китова Екатерина Владимировна — студент кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: evkitova@bk.ru

Information about authors:

Goritskiy Yuriy A. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: goritskiy@yandex.ru

Tigetov David G. — Ph.D. (Techn.), Head of the Moscow Radio Engineering Institute Sector, e-mail: David.Tigetov@gmail.com

Kitova Ekaterina V. — Student Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: evkitova@bk.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: 19.01.2020

The article received to the editor: 19.01.2020