МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.548
DOI: 10.24160/1993-6982-2020-1-105-108

Интегральные представления для обобщенного уравнения Коши–Римана со сверхсингулярной точкой на полуплоскости

А.Б. Расулов, И.Н. Дорофеева

В классе эллиптических систем первого порядка особое место занимает обобщенная система Коши–Римана (ОСКР). Если коэффициенты при младших коэффициентах и правая часть ОСКР принадлежат пространству суммируемых функций со степенью $p > 2$, то представление общего решения уравнения этой системы из класса Гельдера получено И.Н. Векуа.
Исследованию задач для ОСКР с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке, посвящены работы Л.Г. Михайлова, З.Д. Усманова, А.П. Солдатова, Н.Р. Раджабова, А. Тунгатарова, Р. Сакса и др. Понятие же сверхсингулярной особенности принадлежит Н.Р. Раджабову.
Большой интерес к ОСКР вызван также его многочисленными приложениями. Например, ОСКР с сингулярной точкой применяются в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точками уплощения, а с сингулярной линией сводится к варианту Эрнста уравнения Максвелла–Эйнштейна. Во всех опубликованных работах ОСКР с особенностями в младших коэффициентах исследовано в основном в конечной области.
В настоящей статье для уравнения с оператором Коши–Римана с внутренней сверхсингулярной точкой в младших коэффициентах на полуплоскости найдено интегральное представление решения в классе ограниченных функций.

Ключевые слова: операторы Коши–Римана и Векуа, сингулярная точка, полуплоскость.

Для цитирования: Расулов А.Б., Дорофеева И.Н. Интегральные представления для обобщенного уравнения Коши–Римана со сверхсингулярной точкой на полуплоскости // Вестник МЭИ. 2020. № 1. С. 105—108. DOI: 10.24160/1993-6982-2020-1-105-108.

Integral Representations for the Generalized Cauchy-Riemann Equation with a Supersingular Point in a Half Plane

A.B. Rasulov, I.N. Dorofeeva

In the class of first-order elliptic systems, the generalized Cauchy-Riemann system (GCRS) occupies a special place. If the coefficients at the lowest terms and the right-hand side of the GCRS belong to the space of summable functions with degree $p > 2$ the representation of the general solution of the equation of this system from the Helder class was obtained by I.N. Vekua.
The problems for GCRS with coefficients having first-order singularities at an isolated singular point were studied in works by L.G. Mikhailov, Z.D. Usmanov, A.P. Soldatov, N.R. Rajabov, A. Tungatarov, R. Saks, and others. The concept of a super-singular singularity was suggested by N.R. Rajabov. Great interest in GCRS is also stemming from its numerous applications. For example, GCRS with a singular point are used in the theory of infinitesimal flexures of positively curved surfaces with flattening points, and GCRS with a singular line reduces to the Ernst version of the Maxwell-Einstein equation. In all of published papers, GCRS with singularities in the lower coefficients was mainly studied in a finite domain.
In this article, an integral representation of the solution in the class of bounded functions has been found for an equation with a Cauchy-Riemann operator with an inner supersingular point in lower coefficients on a half-plane.

Key words: Cauchy-Riemann operator, Vekua operator, singular point, half-plane.

For citation: Rasulov A.B., Dorofeeva I.N. Integral Representations for the Generalized Cauchy-Riemann Equation with a Supersingular Point in a Half Plane. Bulletin of MPEI. 2020;1:105—108. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2020-1-105-108.

Рассмотрим общую ситуацию для уравнения

$$\partial_{\bar z}U - A(z)U = F(z) \quad (1)$$

с коэффициентом A, непрерывным в некоторой ограниченной области G. Напомним, что если $f \in L^p(G_0)$, $p > 2$ в подобласти $G_0 \subseteq G$, то интегральный оператор Векуа [1]:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{G_0}\frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}, z \in G_0, \quad (2)$$

где $d^2\zeta$ — элемент площади, действующий из $L^p(G_0)$ в класс Гельдера $H(\overline{G_0})$.

Более точно функция Tf принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(G_0)$ и удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar z}Tf = f$, которое понимается в смысле обобщенных функций. Поэтому в предположении $A \in L^p(G_0)$ функция $\Omega = TA$ принадлежит $H(\overline{G_0})$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\bar z} = A, \quad (3)$$

Отсюда следует, что если U является решением уравнения (1) в областях G_0 и $\tilde F = \mathrm{e}^{-\Omega}F \in L^p(G_0)$, то функция $\tilde U = \mathrm{e}^{-\Omega}U$ удовлетворяет уравнению [1]:

$$\frac{\partial\tilde U}{\partial\bar z} = \tilde F.$$

Следовательно, формула

$$U = \mathrm{e}^{\Omega}[T(\mathrm{e}^{-\Omega}F) + \varphi], \quad (4)$$

где φ аналитична в области G_0, описывает общее решение уравнения (1) в этой области.

Аналогичная ситуация имеет место и по отношению ко всей области G, если найдена функция $\Omega \in H_{\mathrm{loc}}(G)$ со свойством (3). В ряде случаев подобную функцию можно построить с помощью последовательности подобластей $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$, исчерпывающих область G.

Пусть T_n определяется аналогично (2) по отношению к G_n, и последовательность $\Omega_n = T_nA$ равномерно сходится к некоторой функции Ω на каждом компакте $K \subseteq G$. Тогда на указанном компакте для достаточно больших n функция Ω_n удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar z}\Omega_n = A$ так, что $\Omega \in H_{\mathrm{loc}}(G)$ и обладает свойством (3).

Применим эти сведения к (1) с коэффициентом A, имеющим большую особенность в одной конечной точке неограниченной области.

Пусть $S^+ = \{(x, y): y > 0, |x| < \infty\}$ — верхняя полуплоскость, $L = \{(x, y): y = 0, |x| < \infty\}$ — вещественная ось $\overline{S} = S \cup L$, а z_1 — конечная точки данной полуплоскости.

В области $\overline{S^+_\varepsilon} = \overline{S^+} \cap \{|z - z_1| \geq \varepsilon\}$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{\bar z}u - Au = f; \quad A = \rho a, \rho = \frac{(z - z_1)}{|z - z_1|^{n+1}} \quad (5)$$

с некоторыми $a(z), f(z) \in C(\overline{S}^+)$.

Исследования для обобщенного уравнения Коши-Римана с сингулярными коэффициентами проведены в конечной области [2 — 9]. В настоящей статье уравнение (5) с внутренней сверхсингулярной точкой анализируется в области S^+.

При построении обобщенного решения уравнения (5) основную роль играет интегральный оператор типа Помпейу–Векуа (2) [1]. В этом случае интегральный оператор T понимается по отношению к области S^+, и роль $L^p(G)$ играет введенное И.Н. Векуа пространство $L^{pq}(S^+) = L^p(S^+) \cap L^q(S^+)$, $1 < q < 2 < p$ [1]. Смысл его в том, что оператор T ограничен $L^{pq}(S^+) \to C^0(\overline{S^+})$, где $C^0(\overline{S^+})$ — пространство функций, ограниченных и непрерывных в замкнутой области $\overline{S^+}$. Следует заметить, что этот оператор также ограничен $(L^q \cap C^0)(S^+) \to C^0(\overline{S^+})$.

Под обобщенным решением уравнения (1) понимается функция $u \in C\left(\overline{S^+} \setminus \{z_1\}\right)$, имеющая первую обобщенную производную по $\bar z$, принадлежащую классу $L^{pq}(S^+_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Для удобства изложения при $n > 1$ введем следующие обозначения:

$$\omega(z) = \frac{2}{(n-1)|z - z_1|^{n-1}};$$
$$A_0(z) = \frac{z - z_1}{|z - z_1|^{n+1}}[a(z) - a(z_1)], \quad (6)$$

где $a \in C(\overline{S^+})$.

Добавим сингулярный интеграл:

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon A)(z) \equiv -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{S^+_\varepsilon}\frac{A(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z},$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (2) по отношению к области S^+_ε.

Теорема. *Пусть $n > 1$ и $\mathrm{Re}a_j(z_j) \geq 0$, $A_0 \in L^{pq}(S^+)$, $1 < q < 2 < p$. Тогда функция $\Omega(z)$, $z \neq z_1$ существует и представима в виде:*

$$\Omega(z) = -a(z_1)\omega(z) + h(z), \quad z \neq 0, \quad (7)$$

где $h(z) \in H(\overline{S^+})$ определяется равенством:

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{a(z_1)}{(n-1)\pi i}\int_L\frac{d\zeta}{|\zeta - \zeta_1|^{n-1}(\zeta - z)}.$$

Соответственно, в предположении $\mathrm{e}^{-\Omega}f \in L^{pq}(S^+)$ общее решение (5) в классе $u \in H_{\mathrm{loc}}(S^+, z_1)$ выглядит как

$$u = \mathrm{e}^{\Omega}[\varphi + T(\mathrm{e}^{-\Omega}f)], \quad (8)$$

где $\varphi \in H_{\mathrm{loc}}(\overline{S^+}, z_1)$ — произвольная аналитическая в области $S^+ \setminus \{z_1\}$ функция и $\varphi(z) = o(|z|^{-1})$, при $|z| \to \infty$.

Доказательство. Покажем, что функция $\Omega(z)$ представима в виде (7) и в области $\{z \in S^+, z \neq z_1\}$ является решением уравнения $\partial_{\bar z}\Omega = A(z)$.

Пусть оператор $T_{R,\varepsilon}$ определяется аналогично (2) по отношению к открытому множеству

$$G_{R,\varepsilon}=S^{+}\cap\{|z-z_1|>\varepsilon\}\cap\{|z|<R\}.$$

Очевидно, что при малом $\varepsilon>0$ граница области $G_{R,\varepsilon}$ составлена из объединения отрезка $l=[-R,R]$, окружности $\gamma:|z-z_1|=\varepsilon$ и полуокружности $l_R=\{z:|z|=R,\operatorname{Re}z\ge 0\}$ с достаточно большим радиусом R. Пусть $L_R=l\cup l_R$.

В соответствии с принятым подходом достаточно убедиться, что

$$\Omega(z)=\lim_{\varepsilon\to 0,\,R\to\infty}(T_{R,\varepsilon}A)(z);\quad z\in K\subseteq G_{R,\varepsilon},$$

причем предел равномерен по z на компактах K.

В дальнейшем $G_{R,\varepsilon}\equiv G_\varepsilon$. С этой целью воспользуемся тождеством

$$-\frac{2}{(n-1)}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\right)=\frac{\zeta-\zeta_1}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}},$$

согласно которому

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon}\frac{\zeta-\zeta_1}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}}\frac{d_2\zeta}{\zeta-z}=\\=-\lim_{\delta_1\to 0}\frac{2}{(n-1)\pi}\int_{G_\varepsilon\bigcap\{|\zeta-z_1|\ge\delta_1\}}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left[\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}\right]d_2\zeta.\end{gathered}\tag{9}$$

В силу формулы Грина

$$\int_D\partial_{\overline{z}}U\,dxdy=\frac{1}{2i}\int_{\partial D}U\,dz\tag{10}$$

имеем:

$$\begin{gathered}-\frac{2}{(n-1)\pi}\int_{G_\varepsilon\bigcap\{|\zeta-z|\ge\delta_1\}}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left[\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}\right]d_2\zeta=\\=\frac{2i}{(n-1)2\pi}\int_{\partial G_\varepsilon}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta-\frac{2i}{(n-1)2\pi}\times\\\times\int_{|\zeta-z|=\delta_1}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta,\end{gathered}$$

где последний интеграл берется по окрестности против часовой стрелки.

Поскольку в обозначениях (6)

$$-\lim_{\delta_1\to 0}\frac{2i}{(n-1)2\pi}\int_{|\zeta-z|=\delta_1}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta=\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}},$$

то в (9) можем перейти к пределу

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon}\frac{\zeta-\zeta_1}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}}\frac{1}{\zeta-z}d_2\zeta=\frac{i}{(n-1)\pi}\times\\\times\int_{\partial G_\varepsilon}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta+\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}=\\=\frac{1}{(n-1)\pi i\varepsilon^{n-1}}\int_{|\zeta-\zeta_1|=\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{(n-1)\pi i}\times\\\times\int_{L_R}\frac{1}{|\zeta|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta+\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}.\end{gathered}$$

По теореме Коши при $\varepsilon<|z-z_1|$ первый интеграл равен нулю так что

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon}\frac{\zeta}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}}\frac{1}{\zeta-z}d_2\zeta=-\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}+\\+\frac{1}{(n-1)\pi i}\int_L\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta.\end{gathered}$$

Поскольку в обозначениях (6)

$$(T_\varepsilon A)(z)=(T_\varepsilon A_0)(z)-\frac{a(z_1)}{\pi}\int_{G_\varepsilon}\frac{\zeta-\zeta_1}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}}\frac{1}{\zeta-z}d_2\zeta,$$

отсюда

$$\begin{gathered}(T_\varepsilon A)(z)=(T_\varepsilon A_0)(z)-a(z_1)\omega(z)+\\+\frac{a(z_1)}{(n-1)\pi i}\int_L\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta,\end{gathered}$$

что равносильно

$$\begin{gathered}(T_\varepsilon A)(z)=\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta-\zeta_1|\le\varepsilon}\frac{A_0(\zeta)}{\zeta-z}d_2\zeta-a(z_1)\omega(z)+h(z),\\|z-z_1|>\varepsilon.\end{gathered}\tag{11}$$

Зафиксируем $\delta>0$ и убедимся, что в области S^{+}_{δ} функция $\Omega_\varepsilon=T_\varepsilon A$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно сходится к $\Omega=TA$, и справедливо равенство (7). При $\varepsilon<\delta/2$ и $z\in G_\delta$ подинтегральное выражение в правой части (11) по модулю не превосходит $2|A_0(\zeta)|/\delta$, и соответствующий интеграл равномерно стремится к нулю.

Остается показать, что $\partial_{\overline{z}}\Omega=A$ в области S^{+}_{δ}. Очевидно, что в этой области $\Omega_\varepsilon=T_\delta A+\varphi_{\varepsilon,\delta}$ с некоторой аналитической в G_ε функцией $\varphi_{\varepsilon,\delta}$. Следовательно, $\varphi_{\varepsilon,\delta}$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно сходится в этой области к некоторой аналитической функции φ_δ так, что $\Omega(z)=(T_\delta A)(z)+\varphi_\delta(z)$, $z\in S^{+}_{\delta}$ и $\partial_{\overline{z}}\Omega=A$.

Из последнего равенства как и в случае регулярных коэффициентов следует, что подстановка $u=e^{\Omega}u_0$ сводит (5) к $\partial_{\overline{z}}u_0=e^{-\Omega}f$, общее решение которого состоит из функций $u_0=\varphi+T(e^{-\Omega}f)$.

Таким образом, придем к представлению (8), завершающему доказательство теоремы.

Заметим, что при $0<\alpha<1$ условие

$$u(z)=O(|z-z_1|^{-\alpha})\exp\left[-\frac{\operatorname{Re}2a(z_1)}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}\right]\tag{12}$$

при $z\to z_1$ равносильно тому, что в этом представлении функция φ имеет $z=z_1$, устранимой особой точкой, и, следовательно, аналитична во всей области S^{+} по условию $\varphi(z)=o(|z|^{-1})$, при $|z|\to\infty$.

Фактически функция u принадлежит классу функций, для которых $e^{-\Omega}u\in H(\overline{S^{+}})$. Этот класс обозначим как $H(\overline{S^{+}},e^{\Omega})$. Аналогичный смысл имеет и весовой класс $L^{pq}(S^{+},e^{\Omega})$. Конечно, при $\operatorname{Re}a(z_1)=0$ последний класс совпадает с $L^{pq}(S^{+})$.

Замечание. Интегральное представление (8) решения $u(z)$ уравнения (1) и оценка (12) позволяют правильно ставить граничные задачи типа Римана–Гильберта и задачи типа Римана в полуплоскости.

Литература

1. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
2. **Михайлов Л.Г.** Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963.
3. **Расулов А.Б., Солдатов А.П.** Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637—650.
4. **Abdymanapov S.A., Begehr H., Harutugian G., Tungatarov A.** Four Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann Equation in a Quarter Plane // Proc. V Intern. Congress of More Progresses in Analysis. Catania, 2005. Pp. 1137—1147.
5. **Усманов З.Д.** Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: Изд-во АН Таджикской ССР, 1993.
6. **Akhmed-Zaki D.K., Tungatarov A.** About One System of First Order Partial Differential Equations with Singular Lines // Proc. IV Congress of the Turkic World Mathematical Soc. Azerbaijan, 2011. P. 144.
7. **Meziani A.** Representation of Solutions of a Singular CR Equation in the Plane // Complex Var. and Elliptic Eq. 2008. V. 53. Pp. 1111—1130.
8. **Reissig M., Timofeev A.** Dirichlet Problems for Generalized Cauchy-Riemann Systems with Singular Coefficients // Complex Variables. 2005. V. 50. № 7 (11). Pp. 653—672.
9. **Begehr H, Dao-Qing Dai.** On Continuous Solutions of a Generalized Cauchy-Riemann System with More Than One Singularity // J. Differential Equations. 2004. V. 196. Pp. 67—90.

References

1. **Vekua I.N.** Obobshchennye Analiticheskie Funktsii. M.: Fizmatgiz, 1959. (in Russian).
2. **Mikhaylov L.G.** Novye Klassy Osobykh Integral'nykh Uravneniy i Ikh Primenenie k Differentsial'nym Uravneniyam s Singulyarnymi Koeffitsientami. Dushanbe: TadzhikNIINTI, 1963. (in Russian).
3. **Rasulov A.B., Soldatov A.P.** Kraevaya Zadacha dlya Obobshchennogo Uravneniya Koshi–Rimana s Singulyarnymi Koeffitsientami. Differentsial'nye uravneniya. 2016;52;5:637—650. (in Russian).
4. **Abdymanapov S.A., Begehr H., Harutugian G., Tungatarov A.** Four Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann Equation in a Quarter Plane. Proc. V Intern. Congress of More Progresses in Analysis. Catania, 2005:1137—1147.
5. **Usmanov Z.D.** Obobshchennye Sistemy Koshi–Rimana s Singulyarnoy Tochkoy. Dushanbe: Izd-vo AN Tadzhikskoy SSR, 1993. (in Russian).
6. **Akhmed-Zaki D.K., Tungatarov A.** About One System of First Order Partial Differential Equations with Singular Lines. Proc. IV Congress of the Turkic World Mathematical Soc. Azerbaijan, 2011:144.
7. **Meziani A.** Representation of Solutions of a Singular CR Equation in the Plane. Complex Var. and Elliptic Eq. 2008;53:1111—1130.
8. **Reissig M., Timofeev A.** Dirichlet Problems for Generalized Cauchy-Riemann Systems with Singular Coefficients. Complex Variables. 2005;50;7 (11): 653—672.
9. **Begehr H, Dao-Qing Dai.** On Continuous Solutions of a Generalized Cauchy-Riemann System with More Than One Singularity. J. Differential Equations. 2004;196: 67—90.

Сведения об авторах:

Расулов Абдурауф Бабаджанович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru
Дорофеева Ирина Николаевна — старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: idoro224@gmail.com

Information about authors:

Rasulov Abdurauf B. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru
Dorofeeva Irina N. — Senior Lecturer of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: idoro224@gmail.com

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *21.05.2019*
The article received to the editor: *21.05.2019*