МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-5-161-166

Задача инициализации сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных и интегральных уравнений Вольтерра второго рода

А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова, Д.А. Шапошникова

Задачи инициализации впервые возникли в метрологии. Здесь рождались проблемы ассимиляции данных наблюдений в математических моделях движения атмосферы.
При малых числах Россби ε решение атмосферных моделей зависит от двух временных масштабов: «медленного» и «быстрого» времен t/ε. Быстро осциллирующие члены в решении несущественны для прогноза погоды на больших интервалах времени, поэтому возникает потребность в специальной процедуре — инициализации, которая подавляла бы быстро осциллирующие или быстрорастущие волны масштабных разложений. В работе В.М. Ипатова по задачам инициализации для моделей общей циркуляции атмосферы доказана разрешимость задачи инициализации для двухслойной квазигеострофической модели общей циркуляции атмосферы. Построена полуявная спектрально-разностная схема.
В настоящей работе задача инициализации рассматривается для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных и интегральных систем Вольтерра 2-го рода с позиции метода регуляризации С.А. Ломова.
Рассматриваются случаи как чисто мнимого спектра предельного оператора, что характеризует наличие быстрых осцилляций в решении, так и спектра с положительной реальной частью, что соответствует экспоненциально растущим слагаемым. Показана процедура аннуляции слагаемых или уменьшения их влияние за счет выбора начальных условий и выделения класса функций (правых частей систем).

Ключевые слова: сингулярные возмущения, задача инициализации, метод регуляризации.

Для цитирования: Елисеев А.Г., Ратникова Т.А., Шапошникова Д.А. Задача инициализации сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных и интегральных уравнений Вольтерра второго рода // Вестник МЭИ. 2019. № 5. С. 161—166. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-5-161-166.

The Problem of Initializing Singularly Perturbed Integro-Differential and Integral Volterra Equations of the Second Kind

A.G. Eliseev, T.A. Ratnikova, D.A. Shaposhnikova

Initialization problems were encountered for the first time in meteorology. The problems of assimilating the observation data in the mathematical models of atmospheric motion emerged in this field.
At small Rossby numbers, the solution of atmospheric models depends on two time scales: the "slow" time and the "fast" time t/ε, where ε is the Rossby number. The rapidly oscillating terms in the solution are irrelevant for weather forecasting on large time intervals. Therefore, there is a need to carry out a special procedure of initialization, which would suppress rapidly oscillating or rapidly growing waves of scale expansions. In V.M. Ipatov's paper on the initialization problems for general atmosphere circulation models, solvability of the initialization problem for a two-layer quasi geostrophic model of general atmospheric circulation was proven. A semi-explicit spectral-difference scheme was constructed.

In this article, the initialization problem is considered for singularly perturbed integro-differential and integral systems of Volterra equations of the second kind from the standpoint of S.A. Lomov's regularization method.
The cases of both a purely imaginary spectrum of the limit operator (which characterizes the presence of fast oscillations in the solution) and a spectrum with a positive real part (which corresponds to an exponentially growing term) are considered. The procedure of cancelling these terms or reducing their influence by choosing the initial conditions and separating a class of functions (the right-hand sides of the systems) is shown.

Key words: singular perturbations, initialization problem, regularization method.

For citation: Eliseev A.G., Ratnikova T.A., Shaposhnikova D.A. The Problem of Initializing Singularly Perturbed Integro-Differential and Integral Volterra Equations of the Second Kind. Bulletin of MPEI. 2019;5:161—166. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-5-161-166.

Задача инициализации возникла в метрологии, ей посвящена обширная литература [1 — 3].

При малых числах Россби решение атмосферных моделей зависит от двух временных масштабов: «медленного» и «быстрого» времени t/ε, где ε — число Россби. Быстро осциллирующие члены в решении несущественны для прогноза погоды на больших интервалах времени, поэтому возникает потребность в специальной процедуре — инициализации, которая подавляла бы быстро осциллирующие или быстро растущие волны масштабных разложений. В работе [3] доказана разрешимость задачи инициализации для двухслойной квазигеострофической модели общей циркуляции атмосферы, построена полуявная спектрально-разностная схема.

В настоящей работе задача инициализации рассматривается с позиции метода регуляризации С.А. Ломова [4] для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных и интегральных систем уравнений Вольтерра 2-го рода.

Спектр предельного оператора чисто мнимый

Рассмотрим двумерный случай.

Задача Коши для интегро-дифференциальной системы.

Пусть дана задача Коши для интегро-дифференциальной системы:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u}(t,\varepsilon)+A(t)u(t,\varepsilon)+\int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=h(t); \\ u(0,\varepsilon)=u^0 \end{cases} \quad (1.1)$$

при условии

$$\begin{aligned} &1.\ h(t)\in C^\infty([0,T],R^2); \\ &2.\ A(t)\in C^\infty([0,T],L(R^2,R^2)); \\ &3.\ Sp(A(t))=\{\pm i\lambda(t)\},\ \lambda(t)>0; \\ &4.\ K(t,s)\in C^\infty(0\le s\le t\le T). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Согласно методу регуляризации решение (1.1) имеет вид:

$$u(t,\varepsilon)=e^{i\varphi(t)/\varepsilon}x(t,\varepsilon)+e^{-i\varphi(t)/\varepsilon}y(t,\varepsilon)+z(t,\varepsilon), \quad (1.3)$$

где $\varphi(t)=\int\limits_0^t \lambda(s)ds;\ x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\in C^\infty[0,T]$ являются регулярными по ε степенными рядами.

Для решения задачи инициализации надо подобрать такие начальные условия $u^0(\varepsilon)$, чтобы быстро осциллирующие составляющие решения $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ обратились в ноль, или их влияние было минимизировано.

Приведем алгоритм решения задачи.

Найдем решение в виде:

$$\begin{aligned} &u(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^n \varepsilon^k\times \\ &\times\left(e^{i\varphi(t)/\varepsilon}x_k(t)+e^{-i\varphi(t)/\varepsilon}y_k(t)+z_k(t)\right)+\varepsilon^{n+1}R_n(t,\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставив (1.4) в систему (1.1), получим серию итерационных задач для определения $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$ и задачу для определения остатка $R_n(t, \varepsilon)$.

Выпишем две итерационные задачи:

$$\begin{cases} (A(t)-\lambda_1(t)I)x_0(t)=0; \\ (A(t)-\lambda_2(t)I)y_0(t)=0; \\ A(t)z_0(t)+\int\limits_0^t K(t,s)z_0(s)ds=h(t); \\ x_0(0)+y_0(0)+z_0(0)=u_0^0; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} (A(t)-\lambda_1(t)I)x_1(t)= \\ =-\dot{x}_0(t)-\dfrac{K(t,t)}{\lambda_1(t)}x_0(t); \\ (A(t)-\lambda_2(t)I)y_1(t)=- \\ =\dot{y}_0(t)-\dfrac{K(t,t)}{\lambda_2(t)}y_0(t); \\ A(t)z_1(t)+\int\limits_0^t K(t,s)z_1(s)ds= \\ =-\dot{z}_0(t)+\dfrac{K(t,0)}{\lambda_1(0)}x_0(0)+\dfrac{K(t,0)}{\lambda_2(0)}y_0(0); \\ x_1(0)+y_1(0)+z_1(0)=u_1^0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Решение (1.5) имеет вид:

$x_0(t)$, $y_0(t)$ — произвольные собственные векторы оператора $A(t)$,

$$z_0(t)=\left(I+\int\limits_0^t A^{-1}(t)K(t,s)\bullet ds\right)^{-1}A^{-1}(t)h(t)=D(t)H(t).$$

Здесь

$$D(t)=\left(I+\int\limits_0^t A^{-1}(t)K(t,s)\bullet ds\right)^{-1}A^{-1}(t)\frac{d}{dt};$$

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Если выбрать в системе (1.5) начальное условие

$$u_0^0 = z_0(0) = D(t)H(t)\Big|_{t=0},$$

то $x_0(0) + y_0(0) = 0$.

Произвольные собственные векторы $x_0(t)$, $y_0(t)$ определяются из условия разрешимости системы (1.6):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(P_1(t)x_0(t)) = \left(\dot{P}_1(t) - \dfrac{1}{\lambda_1(t)}P_1(t)K(t,t)\right)P_1(t)x_0(t) = 0; \\ P_1(0)x_0(0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(P_2(t)y_0(t)) = \left(\dot{P}_2(t) - \dfrac{1}{\lambda_2(t)}P_2(t)K(t,t)\right)P_2(t)y_0(t) = 0; \\ P_2(0)y_0(0) = 0. \end{cases}$$

Начальные условия нулевые, так как выбрано

$$u_0^0 = D(t)H(t)\Big|_{t=0} = A^{-1}(0)h(0).$$

Итерационная задача (1.6) относительно $x_1(t)$, $y_1(t)$ будет иметь вид (1.5), при этом $z_1(t) = -D^2(t)H(t)$ и $u_1^0 = -D^2(t)H(t)\Big|_{t=0}$, тогда $x_1(t) \equiv 0, y_1(t) \equiv 0$. Продолжая этот процесс, получим формальное решение задачи инициализации:

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^{(k+1)}(t)H(t) + \varepsilon^{n+1}R_n(t,\varepsilon).$$

Заметим, что сумма не содержит быстро осциллирующих слагаемых. Если взять в качестве начального условия

$$u^0(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^k\, D^{(k+1)}(t)H(t)\Big|_{t=0}, \qquad (1.7)$$

то получим решение системы (1.1):

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t).$$

Докажем асимптотичность полученного ряда, оценив остаток $R_n(t, \varepsilon)$ и, тем самым, оценив амплитуду быстрых осцилляций.

Пусть

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t) + \varepsilon^{n+1}R_{n+1}(t,\varepsilon). \qquad (1.8)$$

Задача для определения $R_n(t, \varepsilon)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{R}_{n+1}(t,\varepsilon) + A(t)R_{n+1}(t,\varepsilon) + \\ +\displaystyle\int_0^t K(t,s)R_{n+1}(s,\varepsilon)ds = (-1)^{n+1}\dfrac{d}{dt}D^{n+1}(t)H(t); \\ R_{n+1}(0,\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Несложно доказать, что верна следующая теорема.

Теорема 1.

Пусть на отрезке [0, *T*] *дана задача (1.1) с начальным условием*

$$u^0(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varepsilon^k\, D^{(k+1)}(t)H(t)\Big|_{t=0}$$

выполнены условия (1.2), тогда имеет место оценка

$$\left\| u(t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t) \right\|_{C[0,T]} = \underline{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

Как следствие теоремы, амплитуда быстро осциллирующих слагаемых уменьшена до $Q(\varepsilon^{n+1})$. Учитывая, что спектр оператора чисто мнимый, легко показать, что $\| R_{n+1} \|_{C[0,T]} \le M$. Таким образом, амплитуда быстро осциллирующих решений не превышает $M\varepsilon^{n+1}$. Используя данный подход, можно уменьшать влияние быстро осциллирующих слагаемых на решение интегро-дифференциальных систем Вольтерра 2-го рода.

Интегральная система Вольтерра 2-го рода.

Если дана интегральная система Вольтерра 2-го рода с чисто мнимым спектром предельного оператора

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = h(t), \qquad (1.9)$$

то она сводится к эквивалентной интегро-дифференциальной системе

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u}(t,\varepsilon) + A(t)u(t,\varepsilon) + \\ +\displaystyle\int_0^t \dot{K}(t,s)u(s,\varepsilon)ds = \dot{h}(t); \\ u(0,\varepsilon) = \dfrac{h(0)}{\varepsilon}, \end{cases} \qquad (1.10)$$

где $A(T) \equiv K(t, t)$.

Пусть выполнены условия (1.2) для задачи (1.10). Специфика задачи (1.10) состоит в том, что начальные условия диктуются правой частью (1.9). Для того, чтобы убрать быстро осциллирующие слагаемые в решении (1.10), поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u}(t,\varepsilon) + A(t)u(t,\varepsilon) + \\ +\displaystyle\int_0^t \dot{K}(t,s)u(s,\varepsilon)ds = \dot{h}(t); \\ u(0,\varepsilon) = \dfrac{h(0)}{\varepsilon} + u^0(\varepsilon), \end{cases} \qquad (1.11)$$

где $u^0(\varepsilon) = -\dfrac{h(0)}{\varepsilon} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^k\, D^{(k+1)}(t)h(t)\Big|_{t=0}$.

Здесь

$$D(t) = \left(I + \int_0^t A^{-1}(t)K(t,s) \bullet ds\right)^{-1} A^{-1}(t)\frac{d}{dt},$$

тогда формальное решение (1.11) запишем как

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k D^{(k+1)}(t)h(t). \tag{1.12}$$

Асимптотичность ряда (1.12) доказывается аналогично.

Замечание. Если $\forall k=-1,\ 0,\ 1,\ldots D^{(k+1)}(t)h(t)\big|_{t=0}=0,$ то решение (1.10) автоматически не будет содержать быстро осциллирующих компонент.

Спектр предельного оператора содержит положительное собственное значение

Специфику решения задачи инициализации в этом случае можно прояснить на скалярном интегро-дифференциальном и интегральном уравнениях Вольтерра 2-го рода.

Пусть дана задача Коши:

$$\begin{cases}\varepsilon\dot u(t,\varepsilon)-\lambda(t)u(t,\varepsilon)+\int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=h(t);\\ u(0,\varepsilon)=u^0(\varepsilon).\end{cases} \tag{2.1}$$

При выполнении условий:

$$\begin{array}{l}1.\ \ h(t)\in C^{\infty}[0,T];\\ 2.\ \ K(t,s)\in C^{\infty}(0\le s\le t\le T);\\ 3.\ \ \lambda(t)\in C^{\infty}[0,T];\\ 4.\ \ \lambda(t)>0,\ t\in[0,T]\end{array} \tag{2.2}$$

$u^0(\varepsilon)$ подлежит определению.

Решение (2.1) по методу регуляризации запишем в виде:

$$u(t,\varepsilon)=e^{\varphi(t)/\varepsilon}x(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon).$$

Здесь $\varphi(t)=\int\limits_0^t\lambda(s)ds;\ x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon)\in C^{\infty}[0,T];$ $x(t,\ \varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ — регулярные по ε степенные ряды.

Для решения задачи инициализации необходимо подобрать $u^0(\varepsilon)$ таким образом, чтобы $x(t,\varepsilon)\equiv 0$.

Если положить

$$u^0(\varepsilon)=-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t)\big|_{t=0},$$

где $H(t)=\int\limits_0^t h(s)ds$, то формальное решение (2.1) запишем в виде:

$$u(t,\varepsilon)=-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k D^{(k+1)}(t)H(t). \tag{2.3}$$

Здесь $D(t)=\left(1-\int\limits_0^t\frac{1}{\lambda(t)}K(t,s)\bullet ds\right)^{-1}\frac{1}{\lambda(t)}\frac{d}{dt}.$

Существенное отличие от случая с чисто мнимым спектром состоит в том, что в данном случае необходимо найти весь ряд $u^0(\varepsilon)$ и условия для $h(t)$, при которых ряд (2.3) сходится. В противном случае нельзя провести оценку остатка при доказательстве асимптотичности ряда (2.3) при $\varepsilon\to 0$.

Добавим к условиям (2.2) условие на правую часть:

5. $\$\exists\nu>0\ \exists C>0\ \forall t\in[0,T]\ \ |D^k(t)H(t)|\le C\nu^k,$ $k=0,1,2,\ldots.$

Тогда ряд (2.3) сходится равномерно, а, следовательно, является асимптотическим.

Рассмотрим случай интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=h(t). \tag{2.4}$$

Сведем (2.4) к эквивалентной интегро-дифференциальной задаче Коши:

$$\begin{cases}\varepsilon\dot u(t,\varepsilon)-\lambda(t)u(t,\varepsilon)+\int\limits_0^t \dot K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=\dot h(t);\\ u(0,\varepsilon)=\dfrac{h(0)}{\varepsilon},\end{cases} \tag{2.5}$$

где $\lambda(t)\equiv -K(t,t)$.

Предполагается, что для (2.5) выполнены условия 1 — 4. Условие 5 заменяется на

$$\exists\nu>0\ \exists C>0\ \forall t\in[0,T]\ \ |D^k(t)h(t)|\le C\nu^k,$$
$$k=0,1,2,\ldots,$$

где

$$D(t)=\left(1-\int\limits_0^t\frac{1}{\lambda(t)}\dot K(t,s)\bullet ds\right)^{-1}\frac{1}{\lambda(t)}\frac{d}{dt}.$$

Тогда задача Коши

$$\begin{cases}\varepsilon\dot u(t,\varepsilon)-\lambda(t)u(t,\varepsilon)+\int\limits_0^t \dot K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=\dot h(t);\\ u(0,\varepsilon)=u^0(\varepsilon),\end{cases} \tag{2.6}$$

где $u^0(\varepsilon)=\dfrac{h(0)}{\varepsilon}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k D^k(t)h(t)\big|_{t=0}$ в своем решении не содержит экспоненциально растущих слагаемых.

Решение (2.6) примет вид

$$u(t,\varepsilon)=-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k D^k(t)h(t). \tag{2.7}$$

Замечание. Если выбрать $h(t)$ из условия, что $D^n(t)h(t)\equiv 0$, то решение получится в виде конечной суммы $u(t,\varepsilon)=-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k D^k(t)h(t)$.

В случае $\lambda(t)>0$ для решения задачи инициализации необходимо и достаточно выполнение условий:

— для задачи (2.1): $u^0(\varepsilon)=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k D^{k+1}(t)H(t)\big|_{t=0}$;

— для уравнения (2.4): $u^0(\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^k(t)h(t)\Big|_{t=0}$.

Возникает вопрос дальнейшей работы с таким решением. Для этого оценим остаток. Подставим

$$u(t,\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k D^k(t)h(t) + \varepsilon^{n+1} R_{n+1}(t,\varepsilon)$$

в задачу (2.6) и получим

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{R}_{n+1}(t,\varepsilon) - \lambda(t) R_{n+1}(t,\varepsilon) + \\ + \int_0^t \dot{K}(t,s) R_{n+1}(s,\varepsilon) ds = -\frac{d}{dt} D^n(t)h(t); \\ R_{n+1}(0,\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Пусть $R_{n+1}(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(s)ds} r_n(t,\varepsilon)$, тогда

$$\varepsilon \dot{r}_n + e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(s)ds} \int_0^t \dot{K}(t,s) e^{\int_0^s \lambda(s_1)ds_1} r_n(s)ds =$$

$$= -e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(s)ds} \frac{d}{dt} D^n(t)h(t).$$

Проинтегрируем по t и поменяем порядок интегрирования

$$\varepsilon r_n = \varepsilon r_n(0) - \int_0^t \int_s^t \dot{K}(s_1,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s_1} \lambda(s_2)ds_2} ds_1 r_n(s)ds - \\ - \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda(s_1)ds_1} \frac{d}{ds} D^n(s)h(s)ds. \tag{2.8}$$

Учитывая, что $\lambda(t) \ge \delta > 0$, оценим (2.8) по норме $\mathbb{C}[0, T]$. В результате получим, что $\|r_n\| \le \mathbb{C}$. Отсюда $\| R_n \| \le \mathbb{C} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(s)ds}$. С учетом того, что $\delta \le \lambda(t) \le M$ на $[0, T]$:

$$\| R_n \| \le \mathbb{C} e^{MT/\varepsilon}.$$

Тогда $\varepsilon^{n+1} \| R_n \| \le \varepsilon^{n+1} \mathbb{C} e^{MT/\varepsilon}$. Найдем минимум оценки, равный $\left(\frac{eMT}{n+1}\right)^{n+1}$ при $\varepsilon^* = \frac{MT}{n+1}$. Задав точность δ, т. е. $\left(\frac{eMT}{n+1}\right)^{n+1} = \delta$, получим $\varepsilon = \frac{1}{e}\sqrt[n+1]{\delta}$. Или, задав ε, подбираем $n = \left[\frac{eMT}{\varepsilon} - 1\right]$.

В заключение рассмотрим, каким условиям должна удовлетворять $h(t)$, чтобы задача инициализации решалась без подбора начального условия $u^0(\varepsilon)$, автоматически.

Теорема 2. *Пусть $h(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $h(t)$ B-аналитична $\forall t \in [0, T]$ за исключением точки $t = 0$.

2. $\forall k = 0, 1, 2, \ldots, D^k(t)h(t)\Big|_{t=0} = 0$.

3. $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнена обратная теорема Абеля в точке $t = 0$

$$\lim_{s \to 0+} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^s B(s_1)ds_1 \right)^k D^k(t)h(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^0 B(s_1)ds_1 \right)^k D^k(t)h(t) = 0.$$

Тогда $u(t,\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^k h(t)$ — решение (2.4).

Доказательство. Так как $h(t)$ B-аналитична, то она разлагается в ряд

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_t^s B(s_1)ds_1 \right)^k D^k(t)h(t).$$

Здесь

$$B(t) = \lambda(t) + \int_0^t \dot{K}(t,s) \bullet ds;$$

$$D(t) = B^{-1}(t)\frac{d}{dt} = \left(1 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(t)} \dot{K}(t,s) \bullet ds\right)^{-1} \frac{1}{\lambda(t)} \frac{d}{dt};$$

$$\left(\int_t^s B(s_1,\varepsilon)ds_1 \right)^k = \int_t^s B(s_1) \int_t^{s_1} B(s_2) \ldots \int_t^{s_{k-1}} B(s_k)ds_k \ldots ds_1.$$

Решение (2.5) запишется в виде

$$u(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U(t,s)\dot{h}(s)ds$$

где $U(t, s)$ — разрешающий оператор, удовлетворяющий уравнению

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{U}(t,s) = B(t)U(t,s); \\ U(t,s)\big|_{s=t} = I, \end{cases}$$

тогда верна цепочка равенств

$$u(t,s) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U(t,s)\dot{h}(s)ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t,s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_t^s B(s_1)ds_1 \right)^k dsD^k(t)h(t).$$

Упростим

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U(t,s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_t^s B(s_1)ds_1 \right)^k dsD^k(t)h(t) =$$

$$= -U(t,s) \left(\int_t^s B(s_1)ds_1 \right)^{k-1} \Bigg|_0^t D^k(t)h(t) +$$

$$+ \int_0^t U(t,s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_t^s B(s_1)ds_1 \right)^{k-1} dsD^k(t)h(t) =$$

$$=U(t,0)\left(\int_t^0 B(s_1)ds_1\right)^{k-1} D^k(t)h(t)+$$

$$+\int_0^t U(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_t^s B(s)ds\right)^{k-1} dsD^k(t)h(t)=$$

$$=\ldots=U(t,0)\sum_{m=0}^{k-1}\varepsilon^{k-1-m}\left(\int_t^0 B(s)ds\right)^m\times$$

$$\times D^k(t)h(t)-\varepsilon^{k-1}D^k(t)h(t).$$

Отсюда получим

$$u(t,\varepsilon)=U(t,0)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k-1}\varepsilon^{k-1-m}\left(\int_t^0 B(s)ds\right)^m\times$$

$$\times D^k(t)h(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}D^k(t)h(t)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_t^0 B(s)ds\right)^k D^{k+(m+1)}(t)h(t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k D^{k+1}(t)h(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k D^{k+1}(t)h(t).$$

Первое слагаемое равно нулю в силу условий 2, 3:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_t^0 B(s)ds\right)^k D^{k+(m+1)}(t)h(t)=D^{m+1}(0)h(0)=0,$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. **Филатов А.Н., Шершиков В.В.** Асимптотические методы в атмосферных моделях. Л.: Гидрометеоиздат, 1988.

2. **Елисеев А.Г., Шапошникова Д.А.** Задача инициализации сингулярно возмущенного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с диагональным вырождением в случае $n \geq 3$ // Вестник МЭИ. 2015. № 3. С. 143—144.

3. **Ипатова В.М.** Задачи инициализации для моделей общей циркуляции атмосферы // Труды МФТИ. 2012. Т. 4. № 2. С. 121—130.

4. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

References

1. **Filatov A.N., Shershikov V.V.** Asimptoticheskie Metody v Atmosfernykh Modelyakh. L.: Gidrometeoizdat, 1988. (in Russian).

2. **Eliseev A.G., Shaposhnikova D.A.** Zadacha Initsializatsii Singulyarno Vozmushchennogo Integral'nogo Uravneniya Vol'terra 2-go Roda s Diagonal'nym Vyrozhdeniem v Sluchae $n \geq 3$. Vestnik MEI. 2015;3:143—144. (in Russian).

3. **Ipatova V.M.** Zadachi Initsializatsii dlya Modeley Obshchey Tsirkulyatsii Atmosfery. Trudy MFTI. 2012;4;2: 121—130. (in Russian).

4. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnykh Vozmushcheniy. M.: Nauka, 1981. (in Russian).

Сведения об авторах:

Елисеев Александр Георгиевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: predikat@bk.ru
Ратникова Татьяна Анатольевна — доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: RatnikovaTA@mpei.ru
Шапошникова Дарья Алексеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: shaposhnikovda@mail.ru

Information about author:

Eliseev Aleksandr G. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: predikat@bk.ru
Ratnikova Tatyana A. — Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: RatnikovaTA@mpei.ru
Shaposhnikova Darya A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: shaposhnikovda@mail.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *09.10.2018*
The article received to the editor: *09.10.2018*