УДК 517.958:531.33
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-146-151

О модели изотермической акустики для двухкомпонентной среды

С.А. Гриценко, А.М. Мейрманов

Исследована математическая модель, описывающая процессы изотермической акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей. Один из компонентов является упругим телом, другой — пороупругой средой (это может быть насыщенный жидкостью грунт). Пороупругая среда пронизана системой пор, заполненных вязкой слабосжимаемой жидкостью. Дифференциальные уравнения модели, описывающие движение упругого тела и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, базируются на классических законах механики сплошной среды и адекватно отражают физические процессы. Однако они содержат быстро осциллирующие коэффициенты, зависящие от малого параметра, равного отношению среднего размера пор к размеру рассматриваемой области. Подобные коэффициенты делают невозможным применение модели для численных расчетов.

Дано обобщенное решение начально-краевой задачи, приведена теорема существования и единственности обобщенного решения и его априорные оценки. Для проведения процедуры гомогенизации допускается стандартное предположение о периодичности порового пространства и твердого скелета. На основе полученных априорных оценок и метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга выведены усредненные уравнения и начально-краевые условия (предельные при стремлении малого параметра к нулю). В зависимости от характеристик сплошной среды получены различные предельные режимы.

Представлена усредненная модель для специального случая, которая не содержит быстро осциллирующих коэффициентов и может служить для численных расчетов.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Ламе, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

Для цитирования: Гриценко С.А., Мейрманов А.М. О модели изотермической акустики для двухкомпонентной среды // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 146—151. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-146-151.

On the Model of Isothermal Acoustics for a Two-Component Medium

S.A. Gritsenko, A.M. Meirmanov

A mathematical model describing the processes of isothermal acoustics in a heterogeneous medium with two components separated by a common boundary is studied. One of the components is an elastic body, and the other one is a poroelastic medium (for example, it may be a liquid-saturated soil). The poroelastic medium is permeated with a system of pores filled with viscous weakly compressible liquid. The differential equations of the model describing the motion of an elastic body and the joint motion of a solid skeleton and liquid in the pores are based on the classical laws of continuous medium mechanics and adequately reflect the physical processes. However, these equations contain rapidly oscillating coefficients that depend on a small parameter equal to the ratio of the mean pore size to the size of the region under study. The existence of such coefficients prevents the use of the model for carrying out numerical calculations.

The generalized solution of the initial boundary-value problem is given; and the theorem for existence and uniqueness of the generalized solution is presented together with its a priori estimates. For performing the homogenization procedure, the standard assumption about the periodicity of the pore space and solid skeleton is adopted. The obtained a priori estimates and the N. Nguetseng's two-scale convergence method were used as a basis for deriving the averaged equations and the initial boundary conditions (that is, the limit equations with the small parameter tending to zero). Different limiting modes depending on the continuous medium parameters are obtained.

An averaged model for a special case that does not contain rapidly oscillating coefficients and can be used for numerical calculations is presented.

Key words: composite media, periodic structure, Lame's equations, porous elasticity, homogenization of periodic structures, two-scale convergence.

For citation: Gritsenko S.A., Meirmanov A.M. On the Model of Isothermal Acoustics for a Two-Component Medium. MPEI Vestnik. 2017; 6:146—151. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-146-151.

Постановка задачи

Рассмотрена математическая модель акустики в среде с двумя компонентами, разделенными общей границей S^0. Один из компонентов представляет собой упругое тело $\Omega^{(s)}$, другой — пороупругую среду Ω, состоящую из твердого скелета Ω_s и порового пространства Ω_f, заполненного слабосжимаемой вязкой жидкостью. Упругие свойства твердого материала в $\Omega^{(s)}$ и Ω могут различаться. Дифференциальные уравнения точной модели, описывающие движение упругого тела и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, основаны на классических законах механики сплошной среды.

Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб $Q = (0, 1)\times(0, 1)\times(0, 1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega = (0, 1)\times(0, 1)\times(0, a)$, а область $\Omega^{(s)}$ (упругое тело) — открытое дополнение области Ω: $Q = \Omega\cup\Omega^{(s)}\cup S^0$, $S^0 = \partial\Omega\cap\partial\Omega^{(s)}$.

Движение смеси в области Ω при $t > 0$ описывается системой уравнений

$$\left(\frac{\chi^{\varepsilon}}{\bar{c}_f^{2}} + \frac{1-\chi^{\varepsilon}}{\bar{c}_s^{2}}\right) p + \nabla \mathbf{w} = 0; \qquad (1)$$

$$\left(\rho_f \chi^{\varepsilon} + \left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\rho_s\right)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \mathbf{P} + \rho^{\varepsilon}\mathbf{F}; \qquad (2)$$

$$\mathbf{P} = \chi^{\varepsilon}\bar{\alpha}_{\mu}\mathbf{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) + \left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\bar{\alpha}_{\lambda}\mathbf{D}\left(x, \mathbf{w}\right) - p\mathbf{I}. \qquad (3)$$

Движение упругого тела $\Omega^{(s)}$ при $t > 0$ описывается уравнениями Ламе:

$$\frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)}\right)^2} p + \nabla \mathbf{w} = 0; \qquad (4)$$

$$\rho_s^{(0)}\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \mathbf{P}^{(s)} + \rho_s^{(0)}\mathbf{F}; \qquad (5)$$

$$\mathbf{P}^{(s)} = \bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}\mathbf{D}\left(x, \mathbf{w}\right) - p\mathbf{I}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{D}\left(x, \mathbf{w}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^*\right)$ — симметрическая часть тензора $\nabla\mathbf{w}$.

В уравнениях модели $\mathbf{w}$ (перемещение) и p (давление) — неизвестные функции, а все остальные являются заданными. Параметры $\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}$, $\bar{c}_s^{(0)}$ — безразмерные постоянные Ламе для упругого тела в области Ω^s; $\bar{c}_s, \bar{c}_f$ — скорость звука в твердой и жидкой частях соответственно; $\mathbf{P}^{(s)}$ — тензор напряжений в упругом теле; $\rho_s^{(0)}$ — безразмерная плотность упругого тела; $\rho^{\varepsilon} = \rho_f\chi^{\varepsilon} + \left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\rho_s$, ρ_f, ρ_s — безразмерные плотности твердого скелета и жидкости в порах, соотнесенные со средней плотностью воды ρ^0; μ — динамическая вязкость жидкости; g — ускорение силы тяжести; $\mathbf{F}$ — заданный вектор распределенных массовых сил.

На общей границе S^0 выполняются условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \mathbf{w}(x,t) \qquad (7)$$

и нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{P}^{(s)}(x,t)\mathbf{n}(x^0) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \mathbf{P}\ (x,t)\mathbf{n}(x^0). \qquad (8)$$

Замыкают задачу однородные граничные условия

$$\mathbf{w}(x,t) = 0;\ (x,t)\in S_T = S\times(0,T) \qquad (9)$$

на границе $S = \partial Q$ и однородные начальные условия

$$\mathbf{w}(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(x,0) = 0,\ \ x\in Q. \qquad (10)$$

Сформулированная начально-краевая задача достаточно точно описывает физический процесс на микроскопическом уровне, но содержит коэффициенты, осциллирующие на масштабе в несколько микрон (характерный размер пор), поэтому требуется усредненная модель. Задачам, связанным с построением усредненных характеристик сильно неоднородных сред, посвящено большое количество научных трудов российских и зарубежных авторов [1 — 4]. В настоящей работе предложен вывод усредненной модели для случая $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $0 < \mu_1 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$, где $\lambda^0_{(0)}$, μ_1, λ_0 — характеристики среды.

После перехода к безразмерным переменным в модели появляется малый параметр ε. Полагаем , что он равен отношению среднего размера пор l к характерному размеру рассматриваемой области L. Причем от ε зависят не только коэффициенты дифференциальных уравнений $\bar{\alpha}_{\mu}, \bar{\alpha}_{\lambda}, \bar{\alpha}_{\lambda^0}$, но и геометрия рассматриваемой области. Характеристическая функция порового пространства Ω_f в Ω выражается соотношением

$$\chi^{\varepsilon}(x) = \zeta(x)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $\zeta(x)$ — характеристическая функция области Ω в Q.

Вывод усредненных уравнений выполнен на основе подхода, предложенного Р. Барриджем, Д. Келлером [5], и Э. Санчес-Паленсия [6]. Использован метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [7 — 9]. При доказательстве теоремы взяты результаты А.М. Мейрманова [10, 11].

Предположим, что существуют (конечные или бесконечные) пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\alpha}_{\mu}(\varepsilon) = \mu_0;\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\alpha}_{\lambda}(\varepsilon) = \lambda_0;\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}(\varepsilon) = \lambda_0^{(0)};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_{\mu}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \mu_1;\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_{\lambda}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lambda_1;\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lambda_1^{(0)}.$$

Здесь

$$\bar{\alpha}_\mu = \frac{\alpha_\mu}{\alpha_\tau};\ \bar{\alpha}_\lambda = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_\tau};\ \alpha_\tau = \frac{L}{gt^2};\ \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho^0};\ \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho^0}.$$

Чтобы воспользоваться теорией усреднения и методом двухмасштабной сходимости, введем упрощающие геометрические предположения:

1) пусть $\chi(y)$ — *1*-периодическая функция; $Y_s = \{y \in Y : \chi(y) = 0\}$ — твердая часть единичного куба; жидкая часть $Y_f = \{y \in Y : \chi(y) = 1\}$ — открытое дополнение твердой части; $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ — непрерывная липшицева поверхность;

2) область E_f^ε — периодическое повторение в R^3 элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$, а область E_s^ε — периодическое повторение в R^3 элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$;

3) поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f^\varepsilon$ — периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f; твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s^\varepsilon$ — периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s. Липшицева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega_s^\varepsilon$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$;

4) Y_s и Y_f — связные множества;

5) твердый скелет Ω_s^ε — связная область;

6) поровое пространство Ω_f^ε — связная область.

Пусть

$$\int_{Q_T} \left(|\mathbf{F}(x,t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{F}(x,t)}{\partial t} \right|^2 \right) dxdt = F^2 < \infty.$$

Определим обобщенное решение задачи (1) — (10).

Определение. Назовем пару функций ($\mathbf{w}^\varepsilon$, p^ε), таких, что $\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $p^\varepsilon \in L_2(Q_T)$, обобщенным решением задачи (1) — (10), если они удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\left((1-\zeta)\frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)}\right)^2} + \zeta\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^{\,2}} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^{\,2}} \right) \right) p^\varepsilon + \nabla \mathbf{w}^\varepsilon = 0 \quad (11)$$

почти всюду в Q_T и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \rho_{(s)}^\varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{F}\varphi \right) dxdt = \int_{Q_T} \left(\zeta \mathbf{P} + (1-\zeta)\mathbf{P}^{(s)} \right) : \mathbf{D}(x,\varphi)\, dxdt \quad (12)$$

для всех функций φ, таких, что

$$\varphi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T);\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L_2(\Omega_T);\quad \varphi(x,t) = 0, x \in Q.$$

Здесь и далее использованы обозначения: $\mathbf{B}$:$\mathbf{C}$ = tr($\mathbf{BC}^т$), где $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — тензоры второго ранга;

$$\rho_{(s)}^\varepsilon = (1-\zeta)\rho_s^{(0)} + \zeta\left(\rho_f \chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s \right).$$

Основные результаты

Теорема 1. *При всех* $\varepsilon > 0$ *на произвольном интервале времени* (0, T) *существует единственное обобщенное решение* ($\mathbf{w}^\varepsilon$, p^ε) *задачи* (1) — (10), *и для него выполняется оценка*

$$\begin{aligned} &\max_{0<t<T} \int_{\Omega} \left(|p^\varepsilon(x,t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda |\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2 \right) dx + \\ &+ \max_{0<t<T} \int_{\Omega^{(s)}} \left(|p^\varepsilon(x,t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)} |\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2 \right) dx + \\ &+ \max_{0<t<T} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon(x,t)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t^2} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \left| \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right|^2 \right) dx + \\ &+ \max_{0<t<T} \int_{\Omega^{(s)}} \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon(x,t)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t^2} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \left| \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right|^2 \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left(\left| \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right|^2 + \left| \mathbf{D}(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}) \right|^2 \right) dxdt \le C_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где постоянная C_0 *не зависит от* ε *и параметров* $\bar{\alpha}_\mu$, $\bar{\alpha}_\lambda$, $\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [12].

Теорема 2. *Пусть* ($\mathbf{w}^\varepsilon$, p^ε) *— обобщенное решение задачи* (1) — (10), $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $0 < \mu_1 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$, *и* $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{E}\Omega_s(\mathbf{w}^\varepsilon)$ *— продолжение из* Ω_s^ε *в* Ω. *Тогда пределы* $\mathbf{w}$ *и* p *последовательностей* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$ *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(s)}$ *системе Ламе*

$$\frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)}\right)^2} p + \nabla \mathbf{w} = 0; \quad (14)$$

$$\rho_s^{(0)} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\left(\lambda_0^{(0)} \mathbf{D}(x,\mathbf{w}) - p\mathbf{I} \right) + \rho_s^{(0)} \mathbf{F}, \quad (15)$$

граничному и начальному условиям

$$\mathbf{w}(x,t) = 0;\ x \in S_T \setminus \partial\Omega_T; \quad (16)$$

$$\mathbf{w}(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}(x,0)}{\partial t} = 0;\ x \in Q. \quad (17)$$

В области Ω_T *пределы* p_f *(давления жидкости),* $\mathbf{w}_f$ *(перемещения жидкой части),* $\mathbf{w}_s$ *(перемещения твердой части) последовательностей* $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$; $\{\chi^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon\}$; $\{\chi^\varepsilon \mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ *удовлетворяют системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности*

$$\frac{m}{c_f^2} p_f + \nabla \mathbf{w}^f = \mathbf{C}_0^s : \mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s) + \frac{c_0^s}{\lambda_0} p_f, \quad (18)$$

уравнения баланса моментов для твердого компонента

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^f}{\partial t^2} + \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} = \nabla\left(\lambda_0^{(0)} \mathbf{N}_2^s : \mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s) - p_f \mathbf{C}_1^s \right) + \hat{\rho}\mathbf{F}, \quad (19)$$

уравнения баланса моментов для жидкого компонента

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} - m\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = \\ = -\int_0^t \mathbf{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t-\tau)\left(\nabla p_f + \rho_f\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}^s}{\partial \tau^2} - \mathbf{F}(x,\tau)\right)\right)d\tau, \tag{20}$$

условия непрерывности

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \mathbf{w}_s(x,t) \tag{21}$$

и условий непрерывности

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t)\mathbf{n}(x^0) = \\ = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \left(\mathbf{w}^f(x,t) + (1-m)\mathbf{w}_s(x,t)\right)\mathbf{n}(x^0); \tag{22}$$

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}(x,t)) - p(x,t)\mathbf{I}\right)\mathbf{n}(x^0) = \\ = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \left(\lambda_0 \mathbf{N}_2^s : \mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s(x,t)) - p_f\mathbf{C}_1^s\right)\mathbf{n}(x^0) \tag{23}$$

на общей границе $S_T^{(0)}$. Кроме того, в систему входят усредненные начально-краевые условия

$$\mathbf{w}_s(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}_s(x,0)}{\partial t} = 0, \ \ x\in\Omega; \tag{24}$$

$$\mathbf{w}_s(x,t) = 0; \ x\in\partial\Omega\setminus S^{(0)}, \ t\in(0,T) \tag{25}$$

для перемещения твердой части и усредненные начально-краевые условия

$$\mathbf{w}^f(x,t)\mathbf{n}(x) = 0; \ x\in\partial\Omega\setminus S^{(0)}, \ t\in(0,T); \tag{26}$$

$$\mathbf{w}^f(x,0) = 0; \ x\in\Omega \tag{27}$$

для перемещения жидкой части.

Здесь $\hat\rho = m\rho_f + (1-m)\rho_s$ *— симметричный положительно определенный тензор четвертого ранга* $\mathbf{N}_2^s$, *матрицы* $\mathbf{C}_2^s$, $\mathbf{C}_1^s$, *постоянная* c_0^s *задаются формулами* (32), (33), (35), *матрица* $\mathbf{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t-\tau)$ *описывается формулой* (43).

В теореме используется обозначение $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$, где $\mathbf{E}_{\Omega_s^\varepsilon} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$ — оператор продолжения из Ω_s^ε в Ω, такой, что $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_s^\varepsilon \times (0, T)$, и

$$\int_\Omega \left|\mathbf{w}_s^\varepsilon\right|^2 dx \le C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{w}^\varepsilon\right|^2 dx;$$

$$\int_\Omega \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s^\varepsilon)\right|^2 dx \le C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\right|^2 dx.$$

Продолжение выполнено на основании известной леммы К. Конки о продолжении [13].

Доказательство. Априорная оценка (13), полученная в теореме 1, позволяет вычислить двухмасштабные пределы последовательностей $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon)\}$. Двухмасштабный предел $P(x, t, y)$ последовательности $\{p^\varepsilon\}$ выражается формулой

$$P(x,t,y) = (1-\varsigma)\,p + \varsigma\chi(y)p_f(x,t) + \\ + \varsigma(1-\chi(y))P_s(x,t,y),$$

двухмасштабный предел $\mathbf{W}$ последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ — формулой

$$\mathbf{W}(x,t,y) = \chi(y)\mathbf{W}(x,t,y) + (1-\chi(y))\mathbf{w}_s(x,t).$$

Двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ равен $\mathbf{w}_s(x, t)$, а $\{\mathbf{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon)\}$—

$$\mathbf{D}\left(x,\mathbf{w}_s(x,t\right) + \mathbf{D}\left(y,\mathbf{U}(x,t,y)\right).$$

Перейдя к пределу в уравнении неразрывности (11) в форме интегрального тождества и в интегральном тождестве (12), получим

$$\int_{Q_T}\Big((1-\zeta)\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) + \\ \zeta\lambda_0\left((1-m)\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s) + \left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U})\right\rangle_{Y_s}\right)\Big) : \mathbf{D}(x,\varphi)dxdt = \\ = \int_{Q_T}\int_Y \rho_{(s)}(x,y)\left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2\mathbf{W}(x,t,y)}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)dydxdt \tag{28}$$

для любой гладкой функции φ, равной нулю на границе ∂Q, и

$$\int_{Q_T}\left(\eta\int_Y\left(\frac{1-\zeta}{\left(c_s^{(0)}\right)^2} + \zeta\left(\frac{\chi}{\left(c_f\right)^2} + \frac{1-\chi}{\left(c_s\right)^2}\right)\right)\frac{\partial P}{\partial t}dy - \nabla\eta\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\right)dxdt = 0 \tag{29}$$

для любой гладкой функции η.

Соотношения (28), (29) дают уравнения Ламе (14), (15)

$$\frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)}\right)^2}p + \nabla\mathbf{w} = 0;$$

$$\rho_s^{(0)}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) - p\mathbf{I}\right) + \rho_s^{(0)}\mathbf{F}$$

в области $\Omega_T^{(s)}$ и граничные условия (22) и (23)

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t)\mathbf{n}(x^0) = \\ = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \left(\mathbf{w}^f(x,t) + (1-m)\mathbf{w}_s(x,t)\right)\mathbf{n}(x^0);$$

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}(x,t)) - p(x,t)\mathbf{I}\right)\mathbf{n}(x^0) = \\ = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \left(\lambda_0 \mathbf{N}_2^s : \mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s(x,t)) - p_f\mathbf{C}_1^s\right)\mathbf{n}(x^0)$$

на общей границе $S_T^{(0)}$.

Пусть $U_2^{(ij)}(y)$ и $U_2^{(0)}(y)$ — решения периодических начально-краевых задач:

$$\nabla_y\left((1-\chi)\left(\mathbf{N}^{(0)}:\left(\mathbf{J}^{ij}+\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(i,j)})\right)\right)\right)=0; \qquad (30)$$

$$\nabla_y\left((1-\chi)\left(\mathbf{N}^{(0)}:\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})+\mathbf{I}\right)\right)=0, \qquad (31)$$

где $\mathbf{N}^{(0)}=\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{J}^{ij}\otimes\mathbf{J}^{ij}+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$; $\mathbf{J}^{ij}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e_i}\otimes\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i\right)$.

Функцию $\mathbf{U}(x,t,y)$ найдем в следующем виде:

$$\mathbf{U}(x,t,y)=\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_2^{(i,j)}(y)D_{ij}(x,t)+\frac{1}{\lambda_0}q(x,t)\mathbf{U}_2^{(0)}(y);$$

$$\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U})\right\rangle_{Y_s}=\sum_{i,j=1}^{3}\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(i,j)})\right\rangle_{Y_s}D_{ij}+\frac{1}{\lambda_0}q\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\right\rangle_{Y_s}=$$

$$=\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(i,j)})\right\rangle_{Y_s}\otimes\mathbf{J}^{ij}\right):\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s)+\frac{1}{\lambda_0}q\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\right\rangle_{Y_s}.$$

Обозначим

$$\mathbf{N}_2^s=\mathbf{N}^{(0)}:\left((1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{J}^{ij}\otimes\mathbf{J}^{ij}+\sum_{i,j=1}^{3}\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\right\rangle_{Y_s}\otimes\mathbf{J}^{ij}\right); \qquad (32)$$

$$\mathbf{C}_1^s=m\mathbf{I}-\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\right\rangle_{Y_s}, \qquad (33)$$

откуда получим уравнение баланса моментов для твердого компонента

$$\begin{aligned}&\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}^f}{\partial t^2}+\rho_s\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial t^2}=\\&=\nabla\left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{N}_2^s:\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s)-p_f\mathbf{C}_1^s\right)+\hat{\rho}\mathbf{F};\end{aligned} \qquad (34)$$

$$\left\langle\nabla_y\mathbf{U}\right\rangle_{Y_s}=\sum_{i,j=1}^{3}\left\langle\nabla_y\mathbf{U}_2^{(i,j)}\right\rangle_{Y_s}D_{ij}+\frac{1}{\lambda_0}q\left\langle\nabla_y\mathbf{U}_2^{(0)}\right\rangle_{Y_s}=$$

$$=\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left\langle\nabla_y\mathbf{U}_2^{(i,j)}\right\rangle_{Y_s}\mathbf{J}^{ij}\right):\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s)+\frac{1}{\lambda_0}q\left\langle\nabla_y\mathbf{U}_2^{(0)}\right\rangle.$$

Усредненное уравнение неразрывности (18) выполняется при условии

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}_0^s=\sum_{i,j=1}^{3}\left\langle\nabla_y\mathbf{U}_2^{(i,j)}\right\rangle_{Y_s}\mathbf{J}^{ij};\\&c_0^s=\left\langle\nabla_y\mathbf{U}_2^{(0)}\right\rangle_{Y_s}.\end{aligned} \qquad (35)$$

Чтобы вывести уравнение баланса моментов для жидкого компонента, перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (12) с пробной функцией $\varphi(x,t)=h(x,t)\varphi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где $h(x,t)$ — гладкая и финитная в Ω_T функция, а $\varphi_0(y)$ — *1*-периодическая по y, соленоидальная, гладкая, финитная в Y_f функция. Если положим, что $\mathbf{W}^{(f)}=\chi(y)\mathbf{W}$, то предельное интегральное тождество для пары $\{\mathbf{W}^{(f)},\Pi^{(f)}\}$ эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{W}^{(f)}}{\partial t^2}=\frac{\mu_1}{2}\Delta_y\mathbf{W}^{(f)}-\nabla_y\Pi^{(f)}-\nabla p \qquad (36)$$

в области $Y_f\times(0,T)$ начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(f)}(x,0,y)=\frac{\partial\mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}=0,\ y\in Y_f \qquad (37)$$

и граничному условию

$$\mathbf{W}^{(f)}(x,t,y)=\mathbf{w}_s(x,t);\ (y,t)\in\gamma\times(0,T). \qquad (38)$$

Решение $\{\mathbf{W}^{(f)},\Pi^{(f)}\}$ периодической начально-краевой задачи (36) — (38) имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}^{(f)}(x,t,y)=\mathbf{w}_s+\\&+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\mathbf{W}_i^{(f)}(y,t-\tau)\left(\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}+\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau;\\&\Pi^{(f)}(x,t,y)=\\&=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\Pi_i^{(f)}(y,t-\tau)\left(\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x_i}+\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau,\end{aligned}$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(f)},\Pi_i^{(f)}\}$, $i=1,2,3$ — решения следующих периодических начально-краевых задач:

$$\begin{aligned}&\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t^2}=\frac{\mu_1}{2}\Delta_y\mathbf{W}_i^{(f)}-\nabla_y\Pi_i^{(f)}-\nabla p;\\&(y,t)\in Y_f\times(0,T);\end{aligned} \qquad (39)$$

$$\nabla_y\mathbf{W}_i^{(f)}=\left(1-\chi(y)\right)\mathbf{W}_i^{(f)};\ (y,t)\in Y_f\times(0,T); \qquad (40)$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(y,0)=0;\ \rho_f\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}(y,0)}{\partial t}=\mathbf{e}_i;\ y\in Y_f; \qquad (41)$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(y,t)=0;\ (y,t)\in\gamma\times(0,T). \qquad (42)$$

По определению,

$$\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}(x,t)}{\partial t}=\int_{Y_f}\frac{\partial\mathbf{W}^{(f)}(x,y,t)}{\partial t}dy=$$

$$=m\frac{\partial\mathbf{w}_s(x,t)}{\partial t}-\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{Y_f}\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}(y,t-\tau)}{\partial t}dy\right)\otimes\mathbf{e}_i\right)\times$$

$$\times\left(\nabla p(x,\tau)+\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau=m\frac{\partial\mathbf{w}_s(x,t)}{\partial t}-$$

$$-\int_0^t\mathbf{B}^{(f)}(\infty,\mu_1,t-\tau)\left(\nabla p(x,\tau)+\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s(x,\tau)}{\partial t^2}\right)d\tau,$$

где

$$\mathbf{B}^{(f)}(\infty,\mu_1,t-\tau)=\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{Y_f}\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}(y,t-\tau)}{\partial t}dy\right)\otimes\mathbf{e}_i. \qquad (43)$$

Теорема доказана.

Литература

1. **Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984.

2. **Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.** Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.

3. **Шамаев А.С., Шумилова В.В.** Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного упругого материала со слабовязкой жидкостью // Журнал Сибирского федерального ун-та. Серия «Математика и физика». 2015. Т. 8. № 3. С. 356—370.

4. **Жиков В.В., Иосифьян Г.А.** Введение в теорию двухмасштабной сходимости // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2013. Т. 29. С. 281—332.

5. **Burridge R., Keller J.B.** Poroelasticity Equations Derived from Micro-structure // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 70. No. 4. Pp. 1140—1146.

6. **Sanchez-Palencia E.** Non-homogeneous Media and Vibration Theory // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1980. V. 129.

7. **Nguetseng G.** A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. Pp. 608—623.

8. **Nguetseng G.** Asymptotic Analysis for a Stiff Variational Problem Arising in Mechanics // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. Pp.1394—1414.

9. **Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.** Two-scale Convergence // Int. J. Pure and Appl. Math. 2002. V. 2. No. 1. Pp. 35—86.

10. **Мейрманов А.М.** Уравнения акустики в упругих пористых средах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. XIII. № 2. С. 98—110.

11. **Meirmanov A.M.** Derivation of Equations of Seismic and Acoustic Wave Propagation and Equations of Filtration Via Homogenization of Periodic Structures // J. Math. Sci. 2009. V. 163. No. 2. Pp. 111—172.

12. **Мейрманов А.М., Герус А.А., Гриценко С.А.** Усредненные модели изотермической акустики в конфигурации упругое тело — пороупругая среда // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 12. С. 3—19.

13. **Conca C.** On the Application of the Homogenization Theory to a Class of Problems Arising in Fluid Mechanics // Math. Pures et Appl. 1985. V. 64. Pp. 31—75.

References

1. **Bahvalov N.S., Panasenko G.P.** Osrednenie Protsessov v Periodicheskih Sredah. Matematicheskie Zadachi Mekhaniki Kompozitsionnyh Materialov. M.: Nauka, 1984. (in Russian).

2. **Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleynik O.A.** Usrednenie Differentsial'nyh Operatorov. M.: Nauka, 1993. (in Russian).

3. **Shamaev A.S., Shumilova V.V.** Usrednenie Uravneniy Akustiki dlya Chastichno Perforirovannogo Uprugogo Materiala so Slabovyazkoy Zhidkost'yu. Zhurnal Sibirskogo Federal'nogo Un-ta. Seriya «Matematika i Fizika». 2015;8;3:356—370. (in Russian).

4. **Zhikov V.V., Iosif'yan G.A.** Vvedenie v Teoriyu Dvuhmasshtabnoy Skhodimosti. Trudy Seminara im. I.G. Petrovskogo. 2013;29:281—332. (in Russian).

5. **Burridge, R., Keller, J.B.** Poroelasticity Equations Derived from Micro-structure. J. Acoust. Soc. Am. 1981;70;4:1140—1146.

6. **Sanchez-Palencia E.** Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1980;129.

7. **Nguetseng G.** A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization. SIAM J. Math. Anal. 1989;20:608—623.

8. **Nguetseng G.** Asymptotic Analysis for a Stiff Variational Problem Arising in Mechanics. SIAM J. Math. Anal. 1990;21:1394—1414.

9. **Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.** Two-scale Convergence. Int. J. Pure and Appl. Math. 2002;2;1:35—86.

10. **Meyrmanov A.M.** Uravneniya Akustiki v Uprugih Poristyh Sredah. Sibirskiy Zhurnal Industrial'noy Matematiki. 2010;XIII;2:98—110. (in Russian).

11. **Meirmanov A.M.** Derivation of Equations of Seismic and Acoustic Wave Propagation and Equations of Filtration Via Homogenization of Periodic Structures. J. Math. Sci. 2009;163;2:111—172.

12. **Meyrmanov A.M., Gerus A.A., Gritsenko S.A.** Usrednennye Modeli Izotermicheskoy Akustiki v Konfiguratsii Uprugoe Telo — Porouprugaya Sreda. Matematicheskoe Modelirovanie. 2016;28;12:3—19. (in Russian).

13. **Conca C.** On the Application of the Homogenization Theory to a Class of Problems Arising in Fluid Mechanics. Math. Pures et Appl. 1985;64:31—75.

Сведения об авторах

Гриценко Светлана Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: sv.a.gritsenko@gmail.com

Мейрманов Анварбек Мукатович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений НИУ «БелГУ», e-mail: anvarbek@list.ru

Information about authors

Gritsenko Svetlana A. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: sv.a.gritsenko@gmail.com

Meirmanov Anvarbek M. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Differential Equations Dept., NRU « BelSU», e-mail: anvarbek@list.ru

Статья поступила в редакцию 22.03.2017