УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-133-139

Задача инициализации и предельный переход в системе нелинейных интегродифференциальных уравнений с быстро изменяющимися ядрами

М.А. Бободжанова, В.Ф. Сафонов, О.Д. Туйчиев

Рассмотрена проблема предельного перехода в нелинейной сингулярно возмущенной интегродифференциальной системе с быстро убывающим ядром. В отличие от публикаций, посвященных уравнениям с малым параметром при производной и спектром предельного оператора, лежащим строго слева от мнимой оси, в настоящей работе допускаются чисто мнимые точки спектра. В этом случае предельный переход в решении исходной задачи (при стремлении малого параметра к нулю) к решению вырожденной системы в равномерной метрике в общем случае невозможен. Целью является выделение класса начальных данных (класса инициализации), при которых предельный переход в метрике пространства непрерывных функций возможен.
При изучении этого вопроса была использована информация о главном члене регуляризованного (по Ломову) асимптотического решения. Однако дифференциальная система, которой удовлетворяют коэффициенты данного решения, является нелинейной, поэтому разрешимость системы в целом на заданном конечном промежутке времени остается под вопросом. В более ранних работах авторов было показано, что указанная дифференциальная система является нормальной формой, т. е. содержит в правой части только нелинейные резонансные мономы, благодаря этому ее порядок может быть понижен. Однако это не снимает проблемы ее разрешимости в целом. Ситуация становится весьма затруднительной при наличии чисто мнимых точек спектра, которые порождают в решении исходной задачи быстро осциллирующие слагаемые, препятствующие предельному переходу в равномерной метрике. Удалось доказать, что подсистема, соответствующая чисто мнимым собственным значениям, будет замкнутой, и выделить класс начальных векторов для исходной задачи, при которых быстро осциллирующие составляющие в решении исчезают и равномерный переход становится возможным.

Ключевые слова: быстро убывающие ядра, асимптотическое решение, предельный переход, инициализация.

Для цитирования: Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д. Задача инициализации и предельный переход в системе нелинейных интегродифференциальных уравнений с быстро изменяющимися ядрами // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 133—139. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-133-139.

The Initialization Problem and Passage to the Limit in a System of Nonlinear Integro-Differential Equations with Rapidly Varying Kernels

M.A. Bobodzhanova, V.F. Safonov, O.D. Tuychiev

The problem of passage to the limit in a system of nonlinear singularly perturbed integro-differential equations with a rapidly decreasing kernel is addressed. In contrast to publications dealing with equations with a small parameter at the derivative and with the limiting operator's spectrum lying strictly to the left of the imaginary axis, the existence of purely imaginary points of the spectrum is assumed in this study. In this case, passage to the limit in solving the original problem (with the small parameter tending to zero) to solving the singular system in the uniform metric is impossible in the general case. The purpose of this study is to isolate a class of initial data (the initialization class) with which passage to the limit in the metric of the space of continuous functions is possible.
Information about the principal term of a regularized (in the Lomov sense) asymptotic solution was used in studying this matter. However, since the system of differential equations that is consistent with the coefficients of this asymptotic solution is a nonlinear one, the solvability of this system as a whole in a specified finite interval of time remains questionable. In the earlier works of the authors it was shown that this differential system is a normal form; that is, it contains only nonlinear resonant monomials on its right-hand side, due to which its order can be decreased. However, this circumstance does not remove the problem of its solvability as a whole. The situation becomes very difficult in the presence of purely imaginary points in the spectrum. These points generate rapidly oscillating terms in the solution of the initial problem, which prevent the

passage to the limit in a uniform metric. The authors succeeded in showing that the subsystem corresponding to purely imaginary eigenvalues will be a closed one. Owing to this, it was possible to distinguish a class of initial vectors for the initial problem with which rapidly oscillating components in the solution vanish, and a uniform transition becomes possible.

Key words: rapidly decreasing kernels, asymptotic solution, passage to the limit, initialization.

For citation: Bobodzhanova M.A., Safonov V.F., Tuychiev O.D. TThe Initialization Problem and Passage to the Limit in a System of Nonlinear Integro-Differential Equations with Rapidly Varying Kernels. MPEI Vestnik. 2017;6:133—139. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-133-139.

Интегродифференциальным сингулярно возмущенным системам посвящено много работ. В них подробно проанализированы различные случаи асимптотического поведения решений этих систем (при стремлении малого параметра к нулю) и предложены соответствующие алгоритмы построения асимптотических решений. В зависимости от поведения спектра предельного оператора применим тот или иной алгоритм. Если точки спектра лежат в открытой левой полуплоскости, то используется, как правило, метод пограничных функций Васильевой – Бутузова – Нефедова [1, 2], модифицированный применительно к интегродифференциальным уравнениям М.И. Иманалиевым [3]. Если точки спектра при некоторых значениях независимой переменной попадают на мнимую ось, то асимптотический анализ интегродифференциальных уравнений методом погранфункций становится невозможным. В этом случае прибегают к другим методам, например к методу регуляризации Ломова [4, 5]. В настоящей статье представлены нелинейные системы вида

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\,y(s,\varepsilon)ds+ \\ +\varepsilon f(y,t)+h(t),\; y(0,\varepsilon)=y^0,\;\; t\in[0,T] \tag{1}$$

с быстро изменяющимися ядрами. Здесь скалярная функция $\mu(t)$, называемая спектральным значением ядра интегрального оператора, может не обращаться в нуль на отрезке $[0, T]$. Она индуцирует в решении задачи (1) дополнительную сингулярность. Даже в случае медленно изменяющихся ядер $\mu(t)\equiv 0$ задача (1) при наличии чисто мнимых точек спектра $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A(t)$ представляет определенный интерес, так как в работах [1 — 5] она не изучена. Рассмотрен случай задачи (1) в предположении, что $\mu(t)\neq 0\,\forall t\in[0,T]$.

Отметим, что интегродифференциальные уравнения с быстро убывающими ядрами в линейном случае изучены Б.Т. Калимбетовым [6]. В нелинейном случае, т. е. в случае задачи (1), она впервые рассмотрена в [7]. При наличии чисто мнимых точек спектра оператора $A(t)$ предельный переход $\|\, y(t,\varepsilon)-(-A^{-1}(t)h(t))\,\|_{C[\delta,T]}\to 0(\varepsilon\to+0,\delta\in(0,T))$ решения исходной задачи к решению вырожденной системы невозможен. Целью настоящей работы является выделение класса начальных данных $\Sigma=\left\{A,K,h,y^0\right\}$ (класса инициализации), при которых предельный переход в метрике пространства непрерывных функций становится возможным. Поскольку для изучения этой проблемы потребуется главный член регуляризованного асимптотического решения задачи (1), то напомним его построение, воспользовавшись данными публикации [7].

Регуляризация задачи (1)

Уточним условия, при которых будет рассматриваться система (1). Предположим, что:

1) $\lambda_{n+1}\equiv\mu(t)\in C^2\left([0,T],\mathbb{R}^1\right)$;
$K(t,s)\in C^2(0\le s\le t\le T,\mathbb{C}^{n^2})$;
$h(t)\in C^2([0,T],\mathbb{C}^n)$;
$A(t)\in C^2([0,T],\mathbb{C}^{n^2}),\; f(y,t)$ — многочлен по y: $f(y,t)=\sum_{0\le|m|\le l} f^{(m)}(t)y^{(m)}$ с коэффициентами $f^{(m)}(t)\in C^2([0T]\mathbb{C}^n),\, 0\le|m|\le l<\infty$;

2) $\lambda_i(t)\neq\lambda_j(t),\; i\neq j,\; \lambda_i(t)\neq 0\;(\forall t\in[0,T],\;\; i,j=\overline{1,n+1})$;

3) $\mathrm{Re}\lambda_i(t)\le 0,\;\mathrm{Re}\lambda_{n+1}(t)<0\;(\forall t\in[0,T],\;\; i=\overline{1,n})$;

4) равенство $(m,\lambda(t))\equiv m_1\lambda_1(t)+\cdots+m_{n+1}\lambda_{n+1}(t)=\lambda_j(t)$ (при $m\ge 2$ и $j\in\{1, 2, ..., n+1\}$) либо не имеет место ни при каком $t\in[0, T]$, либо выполняется при всех $t\in[0, T]$ (здесь $m = m_1 + ... + m_{n+1}$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами; $|m| = m_1 + ... + m_{n+1}$ — измерение (высота) мультииндекса m).

Следуя методу Ломова [4, 5], введем регуляризирующие функции

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(s)ds\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\; j=\overline{1,n+1}. \tag{2}$$

Для функции $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$, удовлетворяющей условию

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}\equiv y(t,\varepsilon),\; \tau=\tau_1,\ldots,\tau_{n+1},\; \psi=\psi_1,\ldots,\psi_{n+1},$$

где $y(t,\varepsilon)$ — решение системы (1), получим следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}=A(t)\tilde{y}+ \\ +\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\tilde{y}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds+ \\ +\varepsilon f(\tilde{y},t)+h(t),\; \tilde{y}(0,0,\varepsilon)=y^0. \tag{3}$$

В (3) не проведена регуляризация интегрального члена

$$J\tilde{y}(t,\varepsilon)=\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\tilde{y}(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon)ds. \quad (4)$$

Для его регуляризации необходимо ввести класс M_ε, асимптотически инвариантный (при $\varepsilon \to +0$ относительно оператора J [4, с. 62]. Следуя [7], введем пространство U.

Определение 1. Пусть вектор-функция $y(t, \tau) = \{y_1, ..., y_n\}$ принадлежит пространству U, если она представлена в виде суммы

$$y(t,\tau)=y^{(0)}(t)+\sum_{1\le|m|\le N}^{\circledast} y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},\, N=N_y<\infty, \quad (5)$$

с коэффициентами $y^{(0)}(t), y^{(m)}(t)\in C^2([0,T],\mathbb{C}^n)$, не содержащей резонансных экспонент, т. е. таких экспонент $\exp(m, \tau)$ измерения $|m| \ge 2$, для которых при некоторых $j\in\{1, 2, ..., n+1\}$ и $t \in[0, T]$ выполняется равенство $(m,\lambda(t))\equiv m_1\lambda_1(t)+\dots+m_{n+1}\lambda_{n+1}(t)=\lambda_j(t)$ (факт отсутствия в (5) резонансных экспонент отмечен $\circledast$ над знаком суммы).

В качестве класса M_ε возьмем пространство $U|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$. Подставим (5) в интегральный оператор (4):

$$Jy(t,\tau)=\sum_{1\le|m|\le N}^{\circledast} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{n+1}(\theta)d\theta}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m-e_{n+1},\lambda(\theta))d\theta}k^{(m)}(t,s)ds+$$
$$+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{n+1}(\theta)d\theta}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta}k^{(0)}(t,s)ds, \quad (6)$$

где $k^{(m)}(t,s)\equiv K(t,s)y^{(m)}(s),\ m\ge0$. Используя операцию интегрирования по частям, построим для стоящих здесь интегралов

$$J^{(m)}(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{n+1}(\theta)d\theta}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m-e_{n+1},\lambda(\theta))\,d\theta}k^{(m)}(t,s)ds, \quad (7)$$

где $|m| \ge 0$, $m \ne e_{n+1}$, асимптотические разложения по степеням ε [7]:

$$J^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^\nu\varepsilon^{\nu+1}\Big[\left(I_m^\nu k^{(m)}(t,s)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(m,\lambda(\theta))d\theta}-$$
$$-\left(I_m^\nu k^{(m)}(t,s)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{n+1}(\theta)d\theta}\Big](|m|\ge0,m\ne e_{n+1})+\varepsilon^2 g^{(m)}(t,\varepsilon), \quad (8)$$

где $g^{(m)}(t, \varepsilon)$ — некоторая непрерывная по $(t, \varepsilon)\in[0, T]\times(0, \varepsilon_0]$ функция и введены операторы

$$I_m^0=\frac{1}{(m-e_{n+1},\lambda(s))};$$
$$I_m^\nu=\frac{1}{(m-e_{n+1},\lambda(s))}\frac{\partial}{\partial s}I_m^{\nu-1},\ \nu\ge1.$$

В силу выполнения условий (1) — (3) функция $g^{(m)}(t, \varepsilon)$, стоящая в правой части (8), будет равномерно ограниченной, т. е.

$$\left\|g^{(m)}(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le\bar{g}^{(m)}=\mathrm{const}\,\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],$$

$\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, тогда из (7) следует, что образ $Jy(t,\tau)|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$ интегрального оператора (4) системы (1) имеет следующее асимптотическое разложение:

$$Jy(t,\tau)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{n+1}(\theta)d\theta}\int_0^t k^{e_{n+1}}(t,s)ds+$$
$$+\sum_{0\le|m|\le N,\,m\ne e_{n+1}}^{\circledast}\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^\nu\varepsilon^{\nu+1}\Big[\left(I_m^\nu k^{(m)}(t,s)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(m,\lambda(\theta))d\theta}- \quad (9)$$
$$-\left(I_m^\nu k^{(m)}(t,s)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_{n+1}(\theta)d\theta}\Big]+\varepsilon^2 g(t,\varepsilon),$$

где $\left\|g(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le\bar{g}=\mathrm{const}\,\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Тем самым показано, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора J.

Пусть теперь $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ непрерывная по $(t,\tau)\in[0,T]\times\Pi$, $\Pi=\{\tau:\mathrm{Re}\,\tau_j,\ j=\overline{1,n+1}\}$ — вектор-функция в виде суммы

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{1}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\equiv$$
$$\equiv\sum_{k=0}^{1}\varepsilon^k\left(\sum_{0\le|m|\le N_k}^{\circledast}y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\right),\ y^{(m)}(t)\in C^2([0,T],\mathbb{C}^n. \quad (10)$$

Результат подстановки функции (10) в интегральный оператор J запишем в виде

$$J\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=R_0y_0(t,\tau)+$$
$$+\varepsilon\left(R_0y_1(t,\tau)+R_1y_0(t,\tau)\right)+\varepsilon^2Q(t,\varepsilon),$$

где через R_V обозначены операторы порядка (действующие в U), определяемые формулами

$$R_0y(t,\tau)=e^{\tau_{n+1}}\int_0^t k^{e_{n+1}}(t,s)ds;$$
$$R_{\nu+1}y(t,\tau)=(-1)^\nu\sum_{0\le|m|\le N,m\ne e_{n+1}}^{\circledast}\Big[\left(I_m^\nu k^{(m)}(t,s)\right)_{s=t}\times \quad (11)$$
$$\times e^{(m,\tau)}-\left(I_m^\nu k^{(m)}(t,s)\right)_{s=0}e^{\tau_{n+1}}\Big],\ \nu\ge1,\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}.$$

Определение 2. Расширением оператора J назовем оператор

$$\tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{1}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\right)=$$
$$=\sum_{r=0}^{1}\varepsilon^r\sum_{s=0,r-s\ge0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau)+\varepsilon^2Q(t,\varepsilon).$$

Теперь можно окончательно записать систему, расширенную по отношению к исходной (1):

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+L_0\,\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)-\varepsilon f(\tilde{y},t)=h(t),\tilde{y}(0,0,\varepsilon)=y^0;$$
$$L_0\,\tilde{y}\equiv\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{y}. \qquad (12)$$

Построение главного члена асимптотики

Определим решение задачи (11) в виде суммы (10). Для коэффициентов этой суммы получим следующие задачи:

$$Ly_0(t,\tau)\equiv L_0\,y_0-R_0\,y_0=h(t),y_0(0,0)=y^0; \qquad (13)$$

$$Ly_1(t,\tau)=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+\hat{f}(y_0(t,\tau),t)+R_1\,y_0,y_1(0,0)=0 \qquad (14)$$

(члены порядка $O(\varepsilon^2)(\varepsilon\to+0)$ не выписываем); $\wedge$ — операция вложения, ставящая в соответствие произвольной сумме

$$z(t,\tau)=\sum_{|m|\geq 0}^{N}z^{(m)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)}=$$
$$=\sum_{0\leq|m|\leq N}^{\circledast}z^{(m)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)}+\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{|m^j|\geq 2;(m^j,\lambda(t))\equiv\lambda_j(t)}z^{(m^j)}(t)\,\mathrm{e}^{(m^j,\tau)}$$

(в которой могут присутствовать резонансные экспоненты) элемент $\hat{z}(t,\tau)$ пространства U:

$$\hat{z}(t,\tau)=\sum_{|m|\geq 0}^{\circledast}z^{(m)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)}+\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{|m^j|\geq 2;(m^j,\lambda(t))\equiv\lambda_j(t)}z^{(m^j)}\,\mathrm{e}^{\tau_j},$$

в котором нет резонансных экспонент $\mathrm{e}^{(m^j,\tau)}$ (они заменены на соответствующие экспоненты e^{τ_j} первого измерения).

Решение задачи (13) определим в виде элемента пространства U:

$$y_0(t,\tau)=\sum_{0\leq|m|\leq N_0}^{\circledast}y_0^{(m)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)}. \qquad (15)$$

Подставив (15) в (13) и приравняв отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим системы

$$-A(t)y_0^{(0)}(t)=h(t); \qquad (16)$$

$$[\lambda_j(t)I-A(t)]y_0^{e_j}(t)=0,\ \ j=\overline{1,n}; \qquad (17)$$

$$[\lambda_{n+1}(t)I-A(t)]y_0^{e_{n+1}}(t)-\int_0^t K(t,s)\,y_0^{e_{n+1}}(s)ds=0; \qquad (18)$$

$$[(m,\lambda(t))I-A(t)]y_0^{(m)}(t)=0;$$
$$|m|\geq 2,\ (m,\lambda(t))\neq\lambda_j(t),\,j=\overline{1,\,n}. \qquad (19)$$

Поскольку для всех $t\in[0,T]$, $|m|\geq 2$, $j=\overline{1,n}$, выполняются неравенства

$$\lambda_{n+1}(t))\neq\lambda_j(t);\ \det A(t)\neq 0;$$
$$\det([(m,\lambda(t))I-A(t)]\neq 0,$$

то системы (16), (19) имеют следующие решения:

$$y_0^{(0)}(t)=-A^{-1}(t)h(t);\ \ y_0^{e_{n+1}}(t)\equiv 0;$$
$$y^{(m)}(t)\equiv 0,|\,m\,|\geq 2. \qquad (20)$$

Системы (17) имеют решения вида

$$y_0^{e_j}(t)=\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t),\ \ j=\overline{1,\,n}, \qquad (21)$$

где $\alpha_0^{e_j}(t)\in C^2([0,T],\mathbb{C}^1)$ — пока произвольные функции, $j=\overline{1,\,n}$.

При этом решение (15) системы (12) выглядит как

$$y_0(t,\tau)=-A^{-1}(t)h(t)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_0^{e_j}(t)\,\varphi_j(t)\,\mathrm{e}^{\tau_j}. \qquad (22)$$

Подчиняя его начальному условию $y_0(0,0)=y^0$, найдем, что $\sum_{j=1}^{n}\alpha_0^{e_j}(0)\,\varphi_j(0)=A^{-1}(0)h(0)+y^0$, откуда после умножения на $\chi_j(0)$ вычислим

$$\alpha_0^{e_j}(0)=(A^{-1}(0)\,h(0)+y^0,\ \chi_j(0)),\ \ j=\overline{1,\,n}. \qquad (23)$$

Перейдем к задаче (14), подставив в нее решение (22) системы (13), получим

$$Ly_1(t,\tau)=-\dot{y}_0^{(0)}(t)-\sum_{j=1}^{n}(\dot{\alpha}_0^{e_j}(t)\,\varphi_j(t))+$$
$$+(\alpha_0^{e_j}(t)\,\dot{\varphi}_j(t))\mathrm{e}^{\tau_j}+f_0(t)+$$
$$+\sum_{|m|\geq 2:(m,\lambda(t))\neq\lambda_j(t),\,j=\overline{1,n+1}}f^{(m)}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t)\mathrm{e}^{(m,\tau)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}f^{e_i}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t)\mathrm{e}^{\tau_i}+\left(I_0^0\left(K(t,s)y_0^{(0)}(s)\right)\right)_{s=t}-$$
$$-\left(I_0^0\left(K(t,s)y_0^{(0)}(s)\right)\right)_{s=0}\mathrm{e}^{\tau_{n+1}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\left(I_{e_j}^0\left(K(t,s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi_j(s)\right)\right)_{s=t}\mathrm{e}^{\tau_j}-\right.$$
$$\left.-\left(I_{e_j}^0\left(K(t,s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi_j(s)\right)\right)_{s=0}\mathrm{e}^{\tau_{n+1}}\right], \qquad (24)$$

где учтено, что

$$\hat{f}(y_0(t,\tau),t)=f_0(t)+\sum_{i=1}^{n}f^{e_i}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t)\mathrm{e}^{\tau_i}+$$
$$+\sum_{|m|\geq 2:(m,\lambda(t))\neq\lambda_i(t),\,i=\overline{1,n+1}}f^{(m)}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t)\mathrm{e}^{(m,\tau)};$$

$$R_1\,y(t,\tau)\equiv\sum_{0\leq|m|\leq N,m\neq e_{n+1}}^{\circledast}\left[\left(I_m^0\left(K(t,s)y^{(m)}(s)\right)\right)_{s=t}\mathrm{e}^{(m,\tau)}-\right.$$
$$\left.-\left(I_m^0\left(K(t,s)y^{(m)}(s)\right)\right)_{s=0}\mathrm{e}^{\tau_{n+1}}\right]$$

и $y_0^{(0)}(t)\equiv -A^{-1}(t)h(t)$.

Определяя решение системы (24) в виде суммы

$$y_1(t,\tau)=\sum_{|m|\geq 0}^{\circledast} y_1^{(m)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)}, \qquad (25)$$

получим следующие системы для коэффициентов $y_1^{(m)}(t)$:

$$-A(t)y_1^{(0)}(t)=-\dot{y}_0^{(0)}(t)+f_0(t)+\left(I_0^0\,K(t,s)\,y_0^{(0)}(0)\right)_{s=t}; \qquad (26)$$

$$\begin{aligned}&[\lambda_j(t)I-A(t)]y_1^{e_j}(t)=-\dot{\alpha}_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)-\alpha_0^{e_j}(t)\dot{\varphi}_j(t)+\\&+\left(I_{e_j}^0\left(K(t,s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi_j(s)\right)\right)_{s=t}+f^{e_j}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t),\ j=\overline{1,\,n};\end{aligned} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned}&[\lambda_{n+1}(t)I-A(t)]y_1^{e_n+1}(t)-\int_0^t K(t,s)\,y_1^{e_{n+1}}(s)ds=\\&=-\left(I_0^0\left(K(t,s)y_0^{(0)}(s)\right)\right)_{s=0}-\\&-\sum_{j=1}^{n}\left(I_{e_j}^0\left(K(t,s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi_j(s)\right)\right)_{s=0}+f^{e_{n+1}}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t);\end{aligned} \qquad (28)$$

$$\begin{aligned}&[(m,\lambda(t))I-A(t)]y_1^m(t)=\\&=f^m(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t),\quad |m|\geq 2,\\&(m,\lambda(t))\neq\lambda_j(t),\ j=\overline{1,\,n+1}.\end{aligned} \qquad (29)$$

Как и в предыдущем случае, системы (26), (28), (29) имеют единственные решения в классе $C^2([0,T],\mathbb{C}^n)$. Для разрешимости системы (27) в указанном классе необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}&(-\dot{\alpha}_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)-\alpha_0^{e_j}(t)\dot{\varphi}_j(t)+\frac{K(t,t)\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+1}(t)}+\\&+f^{e_j}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t),\chi_j(t))\equiv 0,\ j=\overline{1,\,n}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha}_0^{e_j}=-\left[(\dot{\varphi}_j(t),\chi_j(t))-\frac{(K(t,t)\,\varphi_j(t),\chi_j(t))}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+1}(t)}\right]\alpha_0^{e_j}+\\&+(f^{e_j}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t),\ \chi_j(t))=0,\ j=\overline{1,\,n},\end{aligned} \qquad (30)$$

При этом функции $\alpha_0^{e_j}(t)$ должны удовлетворять начальным условиям (23).

Система (30), (23) в резонансном случае является нелинейной системой дифференциальных уравнений, а значит ее разрешимость на отрезке $[0,\ T]$ не гарантирована. В [4, с. 242—243] показано, что система (30) является системой в нормальной (по Брюно) форме, поэтому для исследования ее разрешимости на отрезке $[0,\ T]$ можно использовать аппарат теории нормальных форм Брюно [8]. Пусть система (30), (23) имеет решение в классе $C^2([0,T],\mathbb{C}^n)$. В этом случае функции $\alpha_0^{e_j}(t)$, входящие в решение (10) системы (13), будут полностью вычислены, а сама система (13) будет иметь единственное решение в пространстве U. При этом будет найдено решение (25) системы (13) с точностью до элементов ядра $\alpha_1^{e_1}(t)\varphi_1(t)\mathrm{e}^{\tau_1}+\cdots+\alpha_1^{e_n}\varphi_n(t)\mathrm{e}^{\tau_n}$. Поиск функций $\alpha_1^{e_1}(t),\ \ldots,\ \alpha_1^{e_n}(t)$, входящих в указанное ядро, осуществляется по той же схеме, что и поиск функций $\alpha_0^{e_j}(t)$. При этом для $\alpha_1^{e_j}(t)$ уже получается линейная система дифференциальных уравнений, разрешимость которой на отрезке $[0,\ T]$ гарантирована гладкостью входящих в нее коэффициентов. Сформулируем соответствующий результат в виде теорем.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1 — 4 и задачи (30), (23) разрешимы на отрезке* $[0,\ T]$. *Тогда итерационные задачи (13), (14) однозначно разрешимы в классе U (при их последовательном решении).*

Построив решение $y = (t,\ \tau)$ и взяв его сужение на регуляризирующих функциях (2), получим функцию $y_{\varepsilon 0}(t)$. Имеет место утверждение [7].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1 — 4 и задачи (30), (23) разрешимы в целом на отрезке* $[0,\ T]$. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ *исходная задача (1) имеет в классе* $C^1([0,T],\mathbb{C}^n)$ *единственное решение* $y = (t,\ \varepsilon)$ *и справедлива оценка*

$$\|\,y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon 0}(t)\,\|_{C[0,T]}\leq C_0\,\varepsilon, \qquad (31)$$

где постоянная $C_0 > 0$ *не зависит от* ε *при* $(0,\ \varepsilon_0]$.

Неравенство (31) означает, что функция $y_{\varepsilon 0}(t)$ является главным членом асимптотики решения задачи (1).

Предельный переход в задаче (1)

Введем множества $\Gamma_j^{N_0}$ резонансных мультииндексов (здесь в мультииндексах m не $n + 1$ компонента, как это было ранее, а на одну компоненту меньше):

$$\begin{aligned}\Gamma_j^{N_0}&=\left\{m=(m_1,\ldots,m_n):\left(m,\lambda\left(t\right)\right)\equiv\right.\\&\left.\equiv\lambda_j\left(t\right),2\leq|m|\leq N_0,\forall t\in\left[0,T\right]\right\},\ j=\overline{1,n}.\end{aligned}$$

Тогда функции $(f^{e_j}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t),\chi_j(t))$ можно записать в форме [4, с. 243]

$$\begin{aligned}&(f^{e_j}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t),\chi_j(t))=f_j^{e_j}\left(t\right)\alpha_0^{e_j}+\\&+\sum_{m^j\in\Gamma_j^{N_j}}f_j^{(m)^j}\left(t\right)\left(\alpha_0^{e_1}\right)^{m_1^j}\cdots\left(\alpha_0^{e_n}\right)^{m_n^j},\ j=\overline{1,n}.\end{aligned} \qquad (32)$$

Согласно теореме 2, точное решение $y = (t,\ \varepsilon)$ задачи (1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}&y\left(t,\varepsilon\right)=-A^{-1}(t)h(t)+\\&+\sum_{j=1}^{n}\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)\mathrm{e}^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}}+\varepsilon M\left(t,\varepsilon\right),\end{aligned} \qquad (33)$$

где $\left\|M\left(t,\varepsilon\right)\right\|_{C[0,T]}\leq\bar{M}=\mathrm{const}\left(\forall\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0\right]\right)$, функции $\alpha_0^{e_j}=\alpha_0^{e_j}\left(t\right)$ удовлетворяют уравнениям (30):

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha}_0^{e_j}=-\left[(\dot{\varphi}_j(t),\chi_j(t))-\frac{(K(t,t)\varphi_j(t),\chi_j(t))}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+1}(t)}\right]\alpha_0^{e_j}+\\&+f_j^{e_j}\left(t\right)\alpha_0^{e_j}+\sum_{m^j\in\Gamma_j^{N_j}}f_j^{(m^j)}\left(t\right)\left(\alpha_0^{e_1}\right)^{m_1^j}\ldots\left(\alpha_0^{e_n}\right)^{m_n^j};\ (34)\\&\alpha_0^{e_j}(0)=(A^{-1}(0)\,h(0)+y^0,\chi_j(0)),\ j=\overline{1,\,n},\end{aligned}$$

а $\left\|M(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]} \le \bar{M} = \text{const}$ при $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало.

Из (32) вытекает, что для любого $\delta\in(0,\ T)$ справедливо неравенство

$$\left\|y(t,\varepsilon)-\left(-A^{-1}(t)h(t)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}}\right)\right\|_{C[\delta,T]} \le \bar{M}\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{M}\varepsilon \ge \left\|y(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)h(t)\right\|_{C[\delta,T]} - \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}}\right\|_{C[\delta,T]}.$$

Если $\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0\left(\forall t\in[0,T], j=\overline{1,n}\right)$, то

$$\left\|y(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)h(t)\right\|_{C[\delta,T]} \to 0,\ \varepsilon\to+0. \qquad (35)$$

Таким образом, при $\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0\left(\forall t\in[0,T], j=\overline{1,n}\right)$ точное решение задачи (1) стремится при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $t\in[\delta,\ T]$) к решению вырожденной (по отношению к (1)) системе. Однако некоторые $\lambda_j(t)$ могут быть чисто мнимыми. Не умаляя общности, можно считать, что собственные значения $\lambda_j(t)$ таковы, что

5) $$\operatorname{Re}\lambda_1(t)\equiv\operatorname{Re}\lambda_2(t)\equiv\ldots\equiv\operatorname{Re}\lambda_{2k}(t)\equiv 0;$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{2k+1}(t)<0,\ldots,\operatorname{Re}\lambda_n(t)<0\ (2k\le n).$$

В этом случае в сумме $\sum_{j=1}^{n}\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t)$ слагаемые с номерами $j\le 2k$ быстро осциллируют и препятствуют существованию предельного перехода $y(t,\varepsilon)\to\bar{y}(t)=y_0^{(0)}(t)(\varepsilon\to+0)$ на отрезке $[0,\ T]$, поэтому их надо удалить, т. е. положить $\alpha_0^{e_j}(t)\equiv 0\left(j=\overline{1,2k},\forall t\in[0,T]\right)$. Это можно сделать следующим образом.

Подсистема системы (34), соответствующая чисто мнимым собственным значениям $\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,2k}$, будет замкнутой относительно неизвестных $\alpha_0^{e_j}$, $j=\overline{1,2k}$,:

$$\dot{\alpha}_0^{e_j} = -\left[(\dot{\varphi}_j(t),\chi_j(t))-\frac{(K(t,t)\varphi_j(t),\chi_j(t))}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+1}(t)}\right]\alpha_0^{e_j}+$$
$$+f_j^{e_j}(t)\alpha_0^{e_j}+\sum_{m^j\in\Gamma_j^{N_j}}f_j^{(m^j)}(t)\left(\alpha_0^{e_1}\right)^{m_1^j}\cdots\left(\alpha_0^{e_{2k}}\right)^{m_{2k}^j}; \qquad (36)$$
$$\alpha_0^{e_j}(0)=(A^{-1}(0)h(0)+y^0,\chi_j(0)),\ j=\overline{1,2k}.$$

Действительно, мультииндексы

$$m^j=\left(m_1^j,\ldots,m_{2k}^j,m_{2k+1}^j,\ldots,m_n^j\right)\in\Gamma_j^{N_j}$$

для каждого фиксированного $j\in\{1,\ \ldots,\ 2k\}$ вычисляются из уравнений (аргумент t опускаем)

$$m_1^j\lambda_1+\ldots+m_{2k}^j\lambda_{2k}+m_{2k+1}^j\lambda_{2k+1}+\ldots+$$
$$+m_n^j\lambda_n\equiv\lambda_j\left(2\le\left|m^j\right|\le N_j\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m_{2k+1}^j\operatorname{Re}\lambda_{2k+1}+\ldots+m_n^j\operatorname{Re}\lambda_n\equiv 0;\\ m_1^j\operatorname{Im}\lambda_1+\ldots+m_{2k}^j\operatorname{Im}\lambda_{2k}+m_{2k+1}^j\operatorname{Im}\lambda_{2k+1}+\\ +\ldots+m_n^j\operatorname{Im}\lambda_n\equiv\operatorname{Im}\lambda_j.\end{cases}$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda_s(t)<0$ при $s=\overline{2k+1,n}$, то первое тождество возможно тогда и только тогда, когда $m_{2k+1}^j=\ldots=m_n^j=0$. Поэтому второе тождество переписывается в виде

$$m_1^j\operatorname{Im}\lambda_1+\ldots+m_{2k}^j\operatorname{Im}\lambda_{2k}\equiv\operatorname{Im}\lambda_j\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m_1^j\lambda_1+\ldots+m_{2k}^j\lambda_{2k}\equiv\lambda_j\left(0\le m_1^j+\ldots+m_{2k}^j\le N_j\right).$$

Это означает, что мультииндексы $m^j=\left(m_1^j,\ldots,m_n^j\right)\in\Gamma_j^{N_j}$ имеют вид $\left(m_1^j,\ldots,m_{2k}^j,0,\ldots,0\right)$, и поэтому подсистема системы (34), соответствующая чисто мнимым собственным значениям $\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,2k}$, будет записана в форме (36).

Если $\alpha_0^{e_j}(0)=(A^{-1}(0)h(0)+y^0,\chi_j(0))=0, j=\overline{1,2k}$, то из (42) следует, что все $\alpha_0^{e_j}(t)\equiv 0$, $j=\overline{1,\ k}$, и поэтому

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t)=$$
$$=\sum_{j=2k+1}^{n}\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t),$$

т. е. главный член асимптотики не будет содержать быстро осциллирующих слагаемых. В этом случае возможен предельный переход и доказан следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (1) — (5) и задачи (30), (23) разрешимы в целом на отрезке* $[0,\ T]$. *Тогда для существования предельного перехода (35) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_0^{e_j}(0)=(A^{-1}(0)h(0)+y^0,\chi_j(0))=0, j=\overline{1,2k}.$$

И, наконец, если все

$$\alpha_0^{e_j}(0)=(A^{-1}(0)h(0)+y^0,\chi_j(0))=0, j=\overline{1,n},$$

(или $y^0=-A^{-1}(0)h(0)$), то из (33) следует, что $y(t,\varepsilon)=-A^{-1}(t)h(t)+\varepsilon M(t,\varepsilon)$, и имеет место равномерный предельный переход

$$\left\|y(t,\varepsilon)-\left(-A^{-1}(t)h(t)\right)\right\|_{C[0,T]}\to 0,\ \varepsilon\to+0, \qquad (37)$$

на всем отрезке $[0,\ T]$, включая и зону пограничного слоя. Отсюда следует, что классом инициализации для задачи (1) будет $\Sigma=\left\{A,K,h,y^0: y^0=-A^{-1}(0)h(0)\right\}$. Он не зависит от ядра $K(t,\ s)$ и означает, что равномерный предельный переход (37) на всем отрезке $[0,\ T]$ будет иметь место, если начальный вектор y^0 лежит на предельном решении задачи (1).

Литература

1. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

2. **Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.** Асимптотическая теория контрастных структур // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 3—32.

3. **Иманалиев М.** Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Илим, 1972.

4. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

5. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

6. **Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.** Метод регуляризации для систем с нестабильным спектральным значением ядра интегрального оператора // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 696—706.

7. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Сингулярно возмущенные нелинейные интегродифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами // Математические заметки. 2002. Т. 5. Вып. 5. С. 654—664.

8. **Брюно А.Д.** Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.

References

1. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.** Asimptoticheskie Razlozheniya Resheniy Singulyarno Vozmushchennyh Uravneniy. M.: Nauka, 1973. (in Russian).

2. **Butuzov V.F., Vasil'eva A.B., Nefedov N.N**. Asimptoticheskaya Teoriya Kontrastnyh Struktur. Avtomatika i Telemekhanika. 1997;7:3—32. (in Russian).

3. **Imanaliev M.** Asimptoticheskie Metody v Teorii Singulyarno Vozmushchennyh Integrodifferentsial'nyh Uravneniy. Frunze: Izd-vo Ilim, 1972. (in Russian).

4. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnyh Vozmushcheniy. M.: Nauka, 1981. (in Russian).

5. **Lomov S.A., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo MGU, 2011. (in Russian).

6. **Safonov V.F., Kalimbetov B.** Metod Regulyarizatsii dlya Sistem s Nestabil'nym Spektral'nym Znacheniem Yadra Integral'nogo Operatora. Differentsial'nye Uravneniya. 1995;31;4:696—706. (in Russian).

7. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Singulyarno Vozmushchennye Nelineynye Integrodifferentsial'nye Sistemy s Bystro Izmenyayushchimisya Yadrami. Matematicheskie Zametki. 2002;5;5:654—664. (in Russian).

8. **Bryuno A.D**. Lokal'nyy Metod Nelineynogo Analiza Differentsial'nyh Uravneniy. M.: Nauka, 1979. (in Russian).

Сведения об авторах

Бободжанова Машхура Абдухафизовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: bobojanovama@mpei.ru
Сафонов Валерий Федорович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»
Туйчиев Олим Джураевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики Худжандского государственного университета имени академика Бободжана Гафурова (Таджикистан)

Information about authors

Bobodzhanova Mashkhura A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: bobojanovama@mpei.ru
Safonov Valeriy F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI
Tuychiev Olim D. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Informatics Dept., Khujand State University of academician Babagan Gafurov (Tajikistan)

Статья поступила в редакцию 15.03.2017