УДК 517.956.4
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-139-142

Оценки потенциала простого слоя для параболических систем в пространстве Дини

М.Ф. Черепова

Рассмотрен потенциал простого слоя, ядром которого является фундаментальная матрица решений параболической по Петровскому системы второго порядка с одной пространственной переменной x. Предполагается, что коэффициенты системы ограничены и равномерно непрерывны с модулем непрерывности, удовлетворяющим дважды условию Дини. Потенциал рассматривается в полуограниченной (по x) криволинейной области с негладкой боковой границей из класса Дини – Гельдера. Плотность потенциала принадлежит пространству Дини. Установлены оценки в классе Дини для пространственной производной второго порядка данного потенциала. Полученные оценки характеризуют возможный рост указанной производной при приближении к боковой границе области.

Ключевые слова: потенциал простого слоя, параболическая система, пространство Дини, модуль непрерывности.

Для цитирования: Черепова М.Ф. Оценки потенциала простого слоя для параболических систем в пространстве Дини // Вестник МЭИ. 2017. № 5. С. 139—142. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-139-142.

Estimates of the Simple Layer Potential for Parabolic Systems in the Dini Space

M.F. Cherepova

The article considers a simple layer potential which has at its kernel the fundamental matrix of solutions to the Petrovsky parabolic second-order system with one spatial variable x. It is assumed that the coefficients of the system are bounded and uniformly continuous, with their modulus of continuity satisfying the double Dini condition. The potential is considered in a semibounded (with respect to x) curvilinear domain with a nonsmooth lateral boundary belonging to the Dini-Hölder class. The density of the potential belongs to the Dini space. Estimates for the second order spatial derivative of this potential in the Dini class are established. The obtained estimates describe the possible growth of this derivative in approaching the domain lateral boundary.

Key words: simple layer potential, parabolic system, Dini space, modulus of continuity.

For citation: Cherepova M.F. Estimates of the Simple Layer Potential for Parabolic Systems in the Dini Space. MPEI Vestnik. 2017;5: 139—142. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-139-142.

Иследована гладкость потенциала простого слоя, порожденного фундаментальной матрицей решений параболической системы второго порядка с одной пространственной переменной. Установлены оценки «вплоть до границы» в пространстве Дини для пространственной производной второго порядка данного потенциала в криволинейной области с негладкой боковой границей. Полученные оценки характеризуют возможный рост указанной производной и ее характер гладкости при приближении к боковой границе области. В случае одного уравнения данные оценки приведены в [1]. Для доказательства использован метод, изложенный в [2], где получены аналогичные оценки в классе Гельдера для параболического потенциала, ядром которого является фундаментальное решение многомерного параболического уравнения второго порядка. Оценки для параболического потенциала простого слоя и его пространственной производной первого порядка в пространстве Дини доказаны в [3—6].

Пусть ω — функция типа модуля непрерывности [7, с. 150—151], удовлетворяющая (для некоторых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $C > 0$) условию

$$\omega(z_1) z_1^{-\varepsilon} \le C\omega(z_2) z_2^{-\varepsilon}, \; z_1 \ge z_2 > 0. \qquad (1)$$

Пространством $H^{\omega}[0, T]$, $0 < T < +\infty$ назовем пространство вектор-функций $\varphi:[0,T] \to R$, непрерывных на $[0, T]$, для которых конечна величина (норма)

$$\|\varphi;[0,\mathrm{T}]\|^{\omega}=\max_{[0,\mathrm{T}]}|\varphi(t)|+\sup_{[0,\mathrm{T}]}\frac{|\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)|}{\omega\left(|\Delta t|^{1/2}\right)}.$$

Здесь, и далее для любого вектора b (или матрицы A) под $|b|$ (соответственно $|A|$), понимаем максимум из модулей компонентов b (элементов A). Обозначим $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T]=\left\{\varphi\in H^{\omega}[0,T]:\varphi(0)=0\right\}$.

З а м е ч а н и е. Для любой непрерывной на $[0, T]$ вектор-функции φ существует функция типа модуля непрерывности ω, удовлетворяющая условию (1) и такая, что $\|\varphi:[0, T]\|^{\omega} < +\infty$ [6]. Другими словами, пространства $H^{\omega}[0, T]$ и $C[0, T]$ непрерывных на $[0, T]$ вектор-функций с нормой $\|\varphi:[0, T]\|^{0} = \max_{[0, T]}|\varphi(t)|$ отличаются только нормами.

Пусть $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}\times(0, T)\}$. Для любой области $G\subset D$ через $C^{0,\omega}\left(\bar{G}\right)$ обозначим пространство функций $u:\bar{G}\to\mathbb{R}$, равномерно непрерывных и ограниченных в $\bar{G}$, с нормой

$$\|u;G\|^{0,\omega}=\sup_{G}|u(x,t)|+\sup_{G}\frac{|u(x+\Delta x,t+\Delta t)-u(x,t)|}{\omega\left(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2}\right)}.$$

В полосе D рассматривается линейный равномерно-параболический по Петровскому [8] матричный оператор

$$Lu=\partial_t u-\sum_{k=0}^{2}A_k(x,t)\partial_x^k u,\ \ u=(u_1,\ldots,u_m),\ m\geq 1,$$

где $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_x^k=\partial^k/\partial x^k$, $A_k=\left\|a_{ij}^k\right\|_{i,j=1}^{m}$ — матрицы размерности $m\times m$, элементы которых — вещественные функции, определенные в $\bar{D}$.

Предположим, что для коэффициентов оператора L выполнены условия:

а) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенству $\mathrm{Re}\mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \bar{D}$, $r = \overline{1, m}$;

б) $a_{ij}^k\in C^{0,\omega_0}\left(\bar{D}\right)$, $i,j=\overline{1,m}$, $k=0,\ 1,\ 2$,

где ω_0 — функция типа модуля непрерывности, удовлетворяющая условию (1) и условию

$$\tilde{\tilde{\omega}}_0(z)=\int_0^z y^{-1}dy\int_0^y\omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi<+\infty,\ z>0. \quad (2)$$

Известно, что при при условиях а), б) и (2) существует фундаментальная матрица решений системы $Lu = 0$, причем она имеет вид [6]

$$\Gamma(x,t;\ \xi,\tau)=Z\left(x-\xi,\ t-\tau;A_2(\xi,\tau)\right)+W(x,t;\xi,\tau);$$
$$(x,t;\ \xi,\tau)\in\bar{D}\times\bar{D},t>\tau, \quad (3)$$

где $Z(x,t; A_2(\xi, \tau))$ — фундаментальная матрица решений системы $\partial_t u-A_2(\xi,\tau)\partial_x^2 u=0$ с «замороженными» в точке (ξ, τ) коэффициентами [9, с. 46; 10, с. 298]),

$$W(x,t;\ \xi,\tau)=$$
$$=\int_\tau^t d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}Z\left(x-y,t-\eta;A_2(y,\eta)\right)\mu(y,\eta;\ \xi,\tau)dy. \quad (4)$$

Вектор-плотность μ в (4) находится из условия, чтобы столбцы матрицы $\Gamma(x,t; \xi,\tau)$ удовлетворяли по переменным (x, t) систему $Lu = 0$ в слое $\{\tau < t < T\}$.

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия а), б) и* (2). *Тогда для матрицы W, определенной равенством* (4), *имеют место оценки*:

$$\left|\Delta_x\partial_x^2 W(x,t;\xi,\tau)\right|\leq C\tilde{\tilde{\omega}}_0\left(|\Delta x|\right)(t-\tau)^{-3/2}\times$$
$$\left[\exp\left\{-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}+\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}\right]; \quad (5)$$

$$\left|\Delta_t\partial_x^2 W(x,t;\ \xi,\tau)\right|\leq$$
$$\leq C\tilde{\tilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}, \quad (6)$$
$$x,x+\Delta x,\ \xi\in\mathbb{R},\ 0\leq\tau<t\leq T,\ \ 0<\Delta t<t-\tau.$$

Здесь и далее через C, c обозначим положительные постоянные, зависящие от δ, T, ω_0, $\tilde{\tilde{\omega}}_0$, кривой Σ и коэффициентов оператора L, конкретный вид которых в данном случае не важен.

З а м е ч а н и е. Оценки (5), (6) при $m = 1$ (т. е. в случае одного уравнения) получены в [1].

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.1 из [1].

В полосе D выделяется полуограниченная область

$$\Omega = \{(x, t):x>g(t), 0 < t < T\}$$

с негладкой боковой границей

$$\Sigma=\left\{(x,t)\in\bar{\Omega}:x=g(t)\right\}. \quad (7)$$

Предположим, что для функции g выполнено условие

$$\left|g(t+\Delta t)-g(t)\right|\leq C|\Delta t|^{1/2}\omega_1\left(|\Delta t|^{1/2}\right),$$
$$t,t+\Delta t\in[0,T], \quad (8)$$

где ω_1 — функция типа модуля непрерывности, удовлетворяющая условию (1).

Обозначим через

$$d(x,t)=\inf_{(\xi,\tau)\in\Sigma,\ \tau\leq t}\left\{|x-\xi|+|t-\tau|^{1/2}\right\},\ \ (x,t)\in\Omega,$$

параболическое расстояние от точки (x, t) до боковой границы Σ. В Ω рассмотрим векторный параболический потенциал простого слоя

$$U\varphi(x,t)\equiv(U\varphi)(x,t)=\int_0^t\Gamma\left(x,t;g(\tau),\tau\right)\varphi(\tau)d\tau, \quad (9)$$

где Γ — фундаментальная матрица решений системы $Lu = 0$; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — вектор-функция.

Основной результат работы представляет следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия а), б) и* (2), *а для кривой* Σ *— условие* (8). *Пусть* ω_2 *— функция типа модуля непрерывности, удовлетворяющая* (1). *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in \overset{0}{H}{}^{\omega_2}[0,T]$ *производная* $\partial_x^2 U\varphi$ *потенциала* (9) *удовлетворяет неравенствам*

$$\left|\partial_x^2 U\varphi(x,t)\right| \le C\|\varphi;[0,T]\|^{\omega_2}\,\omega_3\left(d(x,t)\right)d^{-1}(x,t); \quad (10)$$

$$\begin{aligned}&\left|\Delta_x\partial_x^2 U\varphi(x,t)\right| \le C\|\varphi;[0,T]\|^{\omega_2}\times\\ &\times\omega_4\left(|\Delta x|\right)\left[d^{-1}(x+\Delta x,t)+d^{-1}(x,t)\right];\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}&\left|\Delta_t\partial_x^2 U\varphi(x,t)\right| \le C\|\varphi;[0,T]\|^{\omega_2}\times\\ &\times\omega_4\left(|\Delta t|^{1/2}\right)\left[d^{-1}(x,t+\Delta t)+d^{-1}(x,t)\right],\end{aligned} \quad (12)$$

$$(x,t),\ (x+\Delta x,t),\ (x,t+\Delta t)\in\Omega,$$

где

$$\omega_3 = \tilde\omega_0+\omega_1+\omega_2,\ \tilde\omega_0(z)=\int_0^z\omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi;$$

$$\omega_4 = \tilde{\tilde\omega}_0+\omega_1+\omega_2.$$

Замечание. В случае $m = 1$ (т. е. для одного уравнения) оценки (10)—(12) получены в [1]. Если $\omega_i(z) = z^\alpha$, $i = 0, 1, 2$; $0 < \alpha < 1$ (в случае пространств Гельдера), утверждение теоремы следует из [11].

В соответствии с представлением фундаментальной матрицы решений Γ в виде (3) имеем

$$\partial_x^2 U\varphi(x,t) = U_0\varphi(x,t)+U_1\varphi(x,t), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}&U_0\varphi(x,t)\equiv(U_0\varphi)(x,t)=\\ &=\int_0^t\partial_x^2 Z\left(x-g(\tau),t-\tau;\ A_2\left(g(\tau),\tau\right)\right)\varphi(\tau)\,d\tau;\end{aligned} \quad (14)$$

$$U_1\varphi(x,t)\equiv(U_1\varphi)(x,t)=\int_0^t\partial_x^2 W\left(x,t;g(\tau),\tau\right)\varphi(\tau)\,d\tau. \quad (15)$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия а), б),* (2) *и функция g из* (7) *непрерывна на* $[0, T]$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in C[0, T]$ *потенциал* $U_1\varphi$, *заданный* (15), *удовлетворяет неравенствам*

$$\begin{aligned}&\left|U_1\varphi(x,t)\right| \le C\varphi;[0,T]^0\,\tilde\omega_0\left(d(x,t)\right)d^{-1}(x,t);\\ &\left|\Delta_x U_1\varphi(x,t)\right| \le C\varphi;[0,T]^0\times\\ &\times\tilde{\tilde\omega}_0\left(|\Delta x|\right)\left[d^{-1}(x+\Delta x,t)+d^{-1}(x,t)\right];\\ &\left|\Delta_t U_1\varphi(x,t)\right| \le C\varphi;[0,T]^0\,\tilde{\tilde\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)\times\\ &\times\left[d^{-1}(x,t+\Delta t)+d^{-1}(x,t)\right];\end{aligned}$$

$$(x,t);\ (x+\Delta x,t);\ (x,t+\Delta t)\in\Omega,\ \Delta t>0.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и вектор-функция* $\varphi \in \overset{0}{H}{}^{\omega_2}[0,T]$. *Тогда для потенциала* $U_0\varphi$, *заданного (14), имеют место оценки*

$$\begin{aligned}&\left|U_0\varphi(x,t)\right| \le C\|\varphi;[0,T]\|^{\omega_2}\,\omega_5\left(d(x,t)\right)d^{-1}(x,t);\\ &\left|\Delta_x U_0\varphi(x,t)\right| \le C\|\varphi;[0,T]\|^{\omega_2}\times\\ &\times\omega_5\left(|\Delta x|\right)\left[d^{-1}(x+\Delta x,t)+d^{-1}(x,t)\right];\\ &\left|\Delta_t U_0\varphi(x,t)\right| \le C\|\varphi;[0,T]\|^{\omega_2}\times\\ &\times\omega_5\left((\Delta t)^{1/2}\right)\left[d^{-1}(x,t+\Delta t)+d^{-1}(x,t)\right],\end{aligned}$$

где $\omega_5 = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$; (x, t), $(x + \Delta x, t)$, $(x, t + \Delta t) \in \Omega$; $\Delta t > 0$.

Для доказательства лемм используем метод работ [1, 2]. Теорема 2 следует из представления (13) для потенциала $U\varphi$ и лемм 1, 2.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00306).

Литература

1. **Martynova K.K., Cherepova M.F.** Estimates for the Derivative of Parabolic Simple Layer Potential in the Dini Space // J. Math. Sci. 2016. V. 219. No. 6. Pp. 973—993.

2. **Черепова М.Ф.** Об оценках пространственных производных второго порядка для параболического потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 4. С. 545—549.

3. **Камынин Л.И.** Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини – Гельдера // Сибирский математический журнал. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017—1045.

4. **Камынин Л.И.** О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 4. С. 806—834.

5. **Бадерко Е.А.** О потенциалах для 2*p*-параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9—18.

6. **Зейнеддин М.** Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. в ВИНИТИ РАН 16.04.92. № 1294-В92.

7. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

8. **Петровский И.Г.** О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секция «А». 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1—72.

9. **Эйдельман С.Д.** Параболические системы. М.: Наука, 1964.

10. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

11. **Семаан Х.М.** Об оценках в пространствах Гельдера старшей производной потенциала простого слоя для параболических систем с одной пространственной переменной // Деп. в ВИНИТИ РАН 30.03.98. № 927-В98.

References

1. **Martynova K.K., Cherepova M.F.** Estimates for the Derivative of Parabolic Simple Layer Potential in the Dini Space. J. Math. Sci. 2016;219;6:973—993.

2. **Cherepova M.F.** Ob Otsenkah Prostranstvennyh Proizvodnyh Vtorogo Poryadka dlya Parabolicheskogo Potentsiala Prostogo Sloya. Differentsial'nye Uravneniya. 1996;32;4:545—549. (in Russian).

3. **Kamynin L.I.** Gladkost' Teplovyh Potentsialov v Prostranstve Dini – Gel'dera. Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal. 1970;11;5:1017—1045. (in Russian).

4. **Kamynin L.I.** O Reshenii Metodom Potentsialov Osnovnyh Kraevyh Zadach dlya Odnomernogo Parabolicheskogo Uravneniya Vtorogo Poryadka. Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal. 1974;15;4:806—834. (in Russian).

5. **Baderko E.A.** O Potentsialah dlya 2*p*-parabolicheskih Uravneniy. Differentsial'nye Uravneniya. 1983;19; 1:9—18. (in Russian).

6. **Zeyneddin M.** Gladkost' Potentsiala Prostogo Sloya dlya Parabolicheskoy Sistemy Vtorogo Poryadka Vv Klassah Dini. Dep. v VINITI RAN 16.04.92;1294-V92. (in Russian).

7. **Dzyadyk V.K.** Vvedenie v Teoriyu Ravnomernogo Priblizheniya Funktsiy Polinomami. M.: Nauka, 1977. (in Russian).

8. **Petrovskiy I.G.** O Probleme Koshi dlya Sistem Lineynyh Uravneniy s Chastnymi Proizvodnymi v Oblasti Neanaliticheskih Funktsiy. Byull. MGU. Sektsiya «A». 1938;1;7:1—72. (in Russian).

9. **Eydel'man S.D.** Parabolicheskie Sistemy. M.: Nauka, 1964. (in Russian).

10. **Fridman A.** Uravneniya s chastnymi Proizvodnymi Parabolicheskogo Tipa. M.: Mir, 1968. (in Russian).

11. **Semaan H.M.** Ob Otsenkah v Prostranstvah Gel'dera Starshey Proizvodnoy Potentsiala Prostogo Sloya dlya Parabolicheskih Sistem s Odnoy Prostranstvennoy Peremennoy. Dep. v VINITI RAN 30.03.98;927-V98. (in Russian).

Сведения об авторе

Черепова Марина Федоровна — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: CherepovaMF@mpei.ru

Information about author

Cherepova Marina F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: CherepovaMF@mpei.ru

Статья поступила в редакцию 09.03.2017