УДК 519.6, 517.9
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-94-100

Аппроксимации стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе стержней круглого сечения

А.А. Амосов, Н.Е. Крымов

Особый интерес представляет изучение процесса переноса теплоты в периодических средах, содержащих вакуумные прослойки или полости, через которые перенос теплоты осуществляется посредством излучения. Непосредственное численное решение таких задач сопряжено с значительными вычислительными затратами и становится практически нереальным при большом числе теплопроводящих элементов, особенно для двумерных и трехмерных структур. Поэтому актуальным является построение эффективных приближенных методов решения.

Настоящая статья продолжает серию работ, посвященных построению и обоснованию специальных полудискретных и асимптотических аппроксимаций задач радиационно-кондуктивного теплообмена в периодических системах теплопроводящих элементов, разделенных вакуумом.

В данном случае для стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в периодической системе, состоящей из абсолютно черных теплопроводящих стержней круглого сечения радиусом ε, упакованных в квадратную коробку, предложены приближенные методы решения, основанные на специальных дискретной и асимптотической аппроксимациях исходной задачи. Приведены результаты вычислительных экспериментов, позволяющие сделать выводы о работоспособности методов и характере зависимости их относительных погрешностей от коэффициента теплопроводности λ и радиуса стержней ε.

Искомой величиной считается абсолютная температура. Она является решением краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности с нелинейными нелокальными интрегральными условиями, описывающими теплообмен излучением между стержнями. В предположении, что значение температуры на каждом из стержней приближенно равно среднему по сечению значению, строится дискретная аппроксимация задачи, представляющая собой систему линейных алгебраических уравнений относительно четвертой степени температуры. Поскольку матрица системы симметрична и положительно определена, то для ее численного решения можно использовать метод сопряженных градиентов.

По своей структуре дискретная задача такова, что может рассматриваться как разностная аппроксимация гомогенизированной краевой задачи для уравнения Пуассона с нестандартными краевыми условиями. Эта задача линейна относительно четвертой степени температуры.

Проведена серия вычислительных экспериментов, которая подтверждает работоспособность предложенных методов для материалов с большим коэффициентом теплопроводности. Относительные погрешности методов стремятся к нулю при стремлении параметра ε к нулю. Как и следовало ожидать, при фиксированном значении ε относительные погрешности методов убывают с ростом значения коэффициента теплопроводности λ, достигая значений в десятые доли процента, и оба метода оказываются практически непригодными для плохо проводящих материалов и требуют существенной модификации.

Ключевые слова: приближенные методы, задача радиационно-кондуктивного теплообмена, дискретная и асимптотическая аппроксимации.

Для цитирования: Амосов А.А., Крымов Н.Е. Аппроксимации стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе стержней круглого сечения // Вестник МЭИ. 2017. № 5. С. 94—100. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-94-100.

Approximations for the Stationary Problem of Radiative-conductive Heat Exchange in a System of Rods of Circular Cross Section

A.A. Amosov, N.E. Krymov

In applications, it is of great importance to study the heat transfer process in periodic media containing vacuum interlayers or cavities through which the heat transfer is realized by radiation. A numerical solution of such problems requires considerable computational efforts and becomes, in fact, impossible for a large number of heat transferring elements, especially in the case of two-dimensional and three-dimensional structures. Therefore, it is important to construct effective approximation methods.

This article continues a series of papers devoted to the construction and substantiation of special semi-discrete and asymptotic approximations of radiation-conductive heat transfer problems in periodic systems of heat-conducting elements separated by a vacuum.

In this paper, we consider a stationary problem of radiation-conductive heat transfer in a periodic system consisting of absolutely black heat-conducting rods of circular cross section with radius ε packed in a square box. We constract two new approximate methods based on special discrete and asymptotic approximations of the original problem. The results of computational experiments are given, which make it possible to draw conclusions about the efficiency of methods and the nature of the dependence of their relative errors on the coefficient of thermal conductivity λ and the radius of the rods ε.

The seeking value is the absolute temperature. This function is the solution of the boundary-value problem for the stationary heat equation with nonlinear nonlocal intregral conditions describing the heat exchange by a radiation between the rods. Assuming that the temperature on each of

the rods is approximately equal to the mean value over the cross section, we comstruct a discrete approximation of the original problem, which is a system of linear algebraic equations with respect to the fourth power of a temperature. Since the matrix of the system is symmetric and positive definite, the method of conjugate gradients can be used to solve it numerically.
By its structure, the discrete problem is such that it can be considered as a difference approximation of the homogenized boundary-value problem for the Poisson equation with non-standard boundary conditions. This problem, which we consider as an asymptotic approximation of the original problem, is linear with respect to the fourth power of temperature.
A series of computational experiments is carried out, which confirms the operability of the proposed methods for materials with a large coefficient of thermal conductivity. The relative errors of the methods tend to zero as the parameter tends to zero. For a fixed value of radius ε, the relative errors of the methods decrease with increasing values of the thermal conductivity, reaching values in the tenths of a percent. As expected, both methods are practically unsuitable for poorly conductive materials and require substantial modification.

Key words: approximate methods, the problem of radiative-conductive heat exchange, discrete approximation, asymptotic approximation.

For citation: Amosov A.A., Krymov N.E. Approximations for the Stationary Problem of Radiative-conductive Heat Exchange in a System of Rods of Circular Cross Section. MPEI Vestnik. 2017;5: 94—100. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-94-100.

Введение

Значительный интерес представляет изучение процесса переноса тепла в периодических средах, содержащих вакуумные прослойки или полости, через которые перенос теплоты осуществляется посредством излучения. Непосредственное численное решение таких задач сопряжено с значительными вычислительными затратами и становится практически нереальным при большом числе теплопроводящих элементов, особенно для двумерных и трехмерных структур. Поэтому актуальным является построение эффективных приближенных методов решения.

Настоящая статья продолжает серию работ [1—7], посвященных построению и обоснованию специальных полудискретных и асимптотических аппроксимаций задач радиационно-кондуктивного теплообмена в периодических системах теплопроводящих элементов, разделенных вакуумом, в ней предложены дискретное и асимптотическое приближения, приведены результаты вычислительных экспериментов, позволяющие сделать выводы о работоспособности методов и характере зависимости их относительных погрешностей от коэффициента теплопроводности λ и радиуса стержней ε.

Постановка исходной задачи

Рассмотрим периодическую систему, состоящую из n^2 абсолютно черных теплопроводящих стержней круглого сечения радиусом $\varepsilon = 1/(2n)$, упакованных регулярным образом в квадратную «коробку» (рис. 1). Каждому стержню поставим в соответствие круг $G_{i,j}$ радиуса ε с центром в точке $x_{ij} = (\varepsilon(2i - 1), \varepsilon(2j - 1))$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, а всей системе стержней — множество $G = \bigcup\limits_{1\le i\le n, 1\le j\le n} G_{i,j}$.

Стационарный процесс радиационно-кондуктивного теплообмена в системе стержней G описывается следующей краевой задачей:

$$-\mathrm{div}(\lambda \nabla u) = f, \quad x \in G; \tag{1}$$

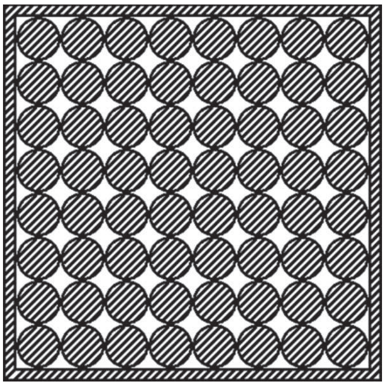

Рис. 1. Система стержней

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + h(u) = \int\limits_{\partial G} h(u(\xi))\varphi(\xi, x)\, d\sigma(\xi) + \int\limits_{\Gamma} h(u_\Gamma(\xi))\varphi(\xi, x)\, d\sigma(\xi), \; x \in \partial G. \tag{2}$$

Искомой функцией является абсолютная температура $u(x) = u(x_1, x_2)$; для (1) $\lambda = \mathrm{const} > 0$ — коффициент теплопроводности; $f(x)$ — плотность тепловых источников. Краевое условие (2) описывает теплообмен излучением между стержнями, функция $h(u) = \sigma_0 |u|^3 u$ при $u > 0$ — плотность потока теплового излучения; $\sigma_0 > 0$ — постоянная Стефана – Больцмана; Γ — внутренняя граница «коробки», в которой находятся стержни; $u_\text{г}(x)$ — заданная на Γ температура; $n(x)$ — внешняя нормаль к ∂G для $x \in \partial G$ и к границе «коробки» для $x \in \Gamma$; $d\sigma(x)$ — естественная мера на $\partial G \cup \Gamma$; φ — угловой коэффициент,

$$\varphi(\xi, x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(n(\xi), x - \xi)\cos(n(x), \xi - x)}{2|x - \xi|}, & \text{если } [x, \xi] \cap G = \varnothing \\ 0, & \text{если } [x, \xi] \cap G \ne \varnothing \end{cases},$$

где $[x, \xi]$ — отрезок, соединяющий точки x и ξ.

Дискретное и асимптотическое приближения

Приведем формальную схему построения дискретного и асимптотического приближений исходной задачи, считая ε малым параметром, стремящимся к нулю, а коэффициент теплопроводности λ достаточно большим.

Дискретная аппроксимация

Проинтегрируем уравнение (1) по G_{ij}:

$$-\int\limits_{\partial G_{ij}} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma(x) = \int\limits_{G_{ij}} f(x)\,dx.$$

Учитывая краевое условие (2), придем к равенству

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\partial G_{ij}} h(u(x))\,d\sigma(x) = \\ &= \sum_{k,\ell} \int\limits_{\partial G_{k,\ell}} h(u(\xi)) \left[\int\limits_{\partial G_{ij}} \varphi(\xi, x)\,d\sigma(x) \right] d\sigma(\xi) + \\ &+ \int\limits_{G_{ij}} f(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} h(u_\Gamma(\xi)) \left[\int\limits_{\partial G_{ij}} \varphi(\xi, x)\,d\sigma(x) \right] d\sigma(\xi), \end{aligned} \tag{3}$$

которое выражает энергетический баланс для множества G_{ij}.

Предположим, что значение температуры u на каждом из множеств G_{ij} приближенно равно среднему по G_{ij} значению

$$[u]_{ij} = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{G_{ij}} u(x)\,dx.$$

При этом предположении из (3) следуют приближенные равенства

$$\begin{aligned} &2\pi\varepsilon h([u]_{ij}) - 2\pi\varepsilon \sum_{k,\ell} \varphi_{ij}^{kl} h([u]_{k\ell}) \approx \pi\varepsilon^2 [f]_{ij} + 2\pi\varepsilon h_{\Gamma,ij}, \\ &1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\varphi_{ij}^{k\ell} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{\partial G_{k\ell} \times \partial G_{ij}} \varphi(\xi, x)\,d\sigma(\xi) d\sigma(x);$$

$$[f]_{ij} = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{G_{ij}} f(x)\,dx;$$

$$h_{\Gamma,ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{\Gamma} h(u_\Gamma(\xi)) \left[\int\limits_{\partial G_{ij}} \varphi(\xi, x)\,d\sigma(x) \right] d\sigma(\xi).$$

Нетрудно понять, что $\varphi_{ij}^{ij} = 0$, $\varphi_{ij}^{k\ell} = 0$, если $|i - k| > 1$, либо $|j - \ell| > 1$. Применение метода «натянутых нитей» [8] дает следующие значения:

$$\varphi_{ij}^{i-1,j} = \varphi_{ij}^{i+1,j} = \varphi_{ij}^{i,j-1} = \varphi_{ij}^{i,j+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi};$$

$$\varphi_{ij}^{i-1,j-1} = \varphi_{ij}^{i-1,j+1} = \varphi_{ij}^{i+1,j-1} = \varphi_{ij}^{i+1,j+1} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}.$$

Найдем приближенное решение задачи (1), (2) в виде кусочно-постоянной функции, равной постоянной U_{ij} на G_{ij} для всех $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, и удовлетворяющие аппроксимирующей приближенные равенства (4) дискретной задачи

$$h_{ij} - \sum_{k,\ell} \varphi_{ij}^{k\ell} h_{k\ell} = \frac{\varepsilon}{2} [f]_{ij} + h_{\Gamma,ij}, \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n \tag{5}$$

относительно неизвестных $h_{ij} = h(U_{ij})$.

Заметим, что дискретная задача (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с разреженной, симметричной и положительно определенной матрицей. Симметричность матрицы системы следует из равенства $\varphi_{ij}^{k\ell} = \varphi_{k\ell}^{ij}$.

Для того чтобы убедиться в положительной определенности матрицы, рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$B(h, h) = \sum_{i,j} h_{ij}^2 - \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} \varphi_{ij}^{k\ell} h_{k\ell} h_{ij},$$

при этом

$$B(h, h) = \sum_{i,j} \left(1 - \widetilde{\varphi_{ij}}\right) h_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} \varphi_{ij}^{k\ell} (h_{k\ell} - h_{ij})^2,$$

где $\widetilde{\varphi_{ij}} = \sum_{k,\ell} \varphi_{ij}^{k,\ell} \le 1.$

Обратим внимание на то, что $\widetilde{\varphi_{ij}} = 1$ для $1 < i < n$, $1 < j < n$. Кроме того, $\widetilde{\varphi_{1j}} = \widetilde{\varphi_{nj}} = 1 - 1/\pi$ для $1 < j < n$, $\widetilde{\varphi_{i1}} = \widetilde{\varphi_{in}} = 1 - 1/\pi$ для $1 < i < n$ и $\widetilde{\varphi_{11}} = \widetilde{\varphi_{1n}} = \widetilde{\varphi_{n1}} = \widetilde{\varphi_{nn}} = 3/4 - 1/\pi$. Следовательно, $B(h, h) \ge 0$, $B(h, h) = 0$ только в случае, когда $h_{ij} = 0$ для всех $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.

Заметим, что в дискретной задаче (5) на каждый стержень G_{ij} приходится лишь одна расчетная точка и общее число неизвестных составляет n^2. Если это число не слишком велико, то в силу разреженности, симметричности и положительной определенности матрицы системы эффективным методом ее решения является метод сопряженных градиентов.

Асимптотическая аппроксимация

Заметим, что в случае $1 < i < n$, $1 < j < n$ уравнение (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &-\varepsilon(\pi - 2) \left[\frac{h_{i-1,j} - 2h_{ij} + h_{i+1,j}}{4\varepsilon^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{ij} + h_{i,j-1}}{4\varepsilon^2} \right] - \\ &-\varepsilon(4 - \pi) \left[\frac{h_{i-1,j-1} - 2h_{ij} + h_{i+1,j+1}}{8\varepsilon^2} + \frac{h_{i-1,j+1} - 2h_{ij} + h_{i+1,j-1}}{8\varepsilon^2} \right] = \frac{\pi}{4} [f]_{ij} \end{aligned}$$

и рассматривать как разностную аппроксимацию дифференциального уравнения

$$-2\varepsilon \Delta h = \frac{\pi}{4} f, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{6}$$

в точке $x_{ij} \in \Omega_\varepsilon = (\varepsilon, 1 - \varepsilon) \times (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

В случае $i = 1$, $1 < j < n$ уравнение (5) можно записать в виде

$$-\varepsilon(\pi-2)\left[\frac{-h_{1j}+h_{2j}}{4\varepsilon^2}+\frac{h_{1,j+1}-2h_{1j}+h_{1,j-1}}{4\varepsilon^2}\right]-$$
$$-\varepsilon(4-\pi)\left[\frac{-h_{1j}+h_{2,j+1}}{8\varepsilon^2}+\frac{-h_{1j}+h_{2,j-1}}{8\varepsilon^2}\right]=$$
$$=\frac{\pi}{4}[f]_{ij}+h_{\Gamma,ij}$$

и рассматривать как разностную аппроксимацию уравнения (6) в точке x_{1j}, принадлежащей левой границе $\partial\Omega_\varepsilon^\ell$ квадрата Ω_ε с учетом краевого условия

$$-2\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}-\varepsilon^2(\pi-2)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+h=h_\Gamma^\varepsilon+\varepsilon\frac{\pi}{8}f,\quad x\in\partial\Omega_\ell^\varepsilon.$$

Здесь h_Γ^ε — функция, заданная на $\partial\Omega_\varepsilon$ и совпадающая с $h_{\Gamma,1j}$ в точке x_{1j}. Заметим, что $h_{\Gamma,ij}\approx h(u_\Gamma(0,(2j-1)\varepsilon)$, если функция u_Γ непрерывна.

Эти соображения приводят к гипотезе, что исходную задачу можно аппроксимировать гомогенизированной краевой задачей

$$-2\varepsilon\Delta h(v)=\frac{\pi}{4}f,\quad x\in\Omega_\varepsilon; \tag{7}$$

$$-2\varepsilon\frac{\partial h(v)}{\partial x}-\varepsilon^2(\pi-2)\frac{\partial^2 h(v)}{\partial y^2}+h(v)= =h_\Gamma^\varepsilon+\varepsilon\frac{\pi}{8}f,\quad x\in\partial\Omega_\varepsilon^\ell; \tag{8}$$

$$2\varepsilon\frac{\partial h(v)}{\partial x}-\varepsilon^2(\pi-2)\frac{\partial^2 h(v)}{\partial y^2}+h(v)= =h_\Gamma^\varepsilon+\varepsilon\frac{\pi}{8}f,\quad x\in\partial\Omega_\varepsilon^r; \tag{9}$$

$$-2\varepsilon\frac{\partial h(v)}{\partial y}-\varepsilon^2(\pi-2)\frac{\partial^2 h(v)}{\partial x^2}+h(v)= =h_\Gamma^\varepsilon+\varepsilon\frac{\pi}{8}f,\quad x\in\partial\Omega_\varepsilon^d; \tag{10}$$

$$2\varepsilon\frac{\partial h(v)}{\partial y}-\varepsilon^2(\pi-2)\frac{\partial^2 h(v)}{\partial x^2}+h(v)= =h_\Gamma^\varepsilon+\varepsilon\frac{\pi}{8}f,\quad x\in\partial\Omega_\varepsilon^u. \tag{11}$$

Здесь $\partial\Omega_\varepsilon^\ell$, $\partial\Omega_\varepsilon^r$, $\partial\Omega_\varepsilon^d$, $\partial\Omega_\varepsilon^u$ — левая, правая, нижняя и верхняя части границы $\partial\Omega_\varepsilon$ квадрата Ω_ε. Функция h_Γ^ε задана на $\partial\Omega_\varepsilon$ и совпадает с $h_{\Gamma,ij}$ в точках $x_{ij}\in\partial\Omega_\varepsilon$. Простейшим способом построения этой функции является использование линейной интерполяции значений $h_{\Gamma,ij}$. Предполагается, что плотность источников теплоты f можно считать заданной на [0,1]×[0,1] и не зависящей от ε функцией.

Таким образом, вместо того, чтобы решать задачу (1), (2), можно решить линейную относительно $h(v)$ краевую задачу (7) — (11), принимая значения функции v в точках x_{ij}, $1\le i\le n$, $1\le j\le n$ за приближения к значениям $u(x_{ij})$. Несмотря на нестандартный вид краевых условий, задача (7) — (11) значительно проще исходной. Ее можно решить при очень большом числе n^2 теплопроводящих элементов, используя лишь информацию о значении параметра $\varepsilon = 1/2n$.

Таким образом, оба предложенных приближенных метода решения исходной задачи содержат общий недостаток: они не используют информацию о значении коэффициента теплопроводности λ. Такой подход допустим, если значение λ достаточно велико, и приводит к значительным погрешностям для материалов с низким коэффициентом теплопроводности.

Вычислительные эксперименты

Покажем результаты некоторых из проведенных вычислительных экспериментов, позволяющих сделать предварительные выводы о качестве предложенных аппроксимаций.

Использована система стержней круглого сечения, упакованных в квадратную коробку 1×1 м. Температура u_Γ на левой и правой границах коробки задавалась непрерывно меняющимися в пределах 300...1000 K функциями с двумя асимметрично расположенными максимумами. На верхней и нижней границах температура u_Γ считалась равной 300 K. Рассматривался случай $f = 0$, когда внутренние источники и стоки теплоты отсутствуют.

Для решения дискретной задачи (5) использовался метод сопряженных градиентов. Гомогенизированная задача (7) — (11) решалась с помощью разностной схемы с использованием прямоугольной сетки с достаточно мелким шагом.

Полученные приближенные решения сравнивались с «точным» решением исходной задачи (1), (2), за которое принималось решение, полученное методом конечных разностей с использованием на каждом из множеств G_{ij} достаточно подробной радиальной сетки.

Для оценки относительных погрешностей приближений были взяты следующие величины:

$$\delta U=\frac{\sqrt{\sum_{i,j}\left([u]_{ij}-U_{ij}\right)^2}}{\sqrt{\sum_{i,j}[u]_{ij}^2}};\quad \delta v=\frac{\sqrt{\sum_{i,j}\left([u]_{i,j}-v(x_{ij})\right)^2}}{\sqrt{\sum_{i,j}[u]_{ij}^2}}.$$

На рис. 2 представлены графики зависимости относительных погрешностей методов от радиуса стержней ε при значении коэффициента теплопроводности λ = 200 Вт/(м·K). Видно, что погрешности стремятся к нулю при ε → 0. Аналогичная картина наблюдается и при других значениях λ.

На рис. 3 изображена зависимость погрешностей от коэффициента теплопроводности λ при фиксированном значении ε ≈ 0,01 м. Как и следовало ожидать, с ростом λ наблюдается уменьшение погрешностей. Так, при λ = 275 Вт/(м·K) погрешности дискретного приближения составляют всего 0,078 %, а асимптотического — 0,12 %.

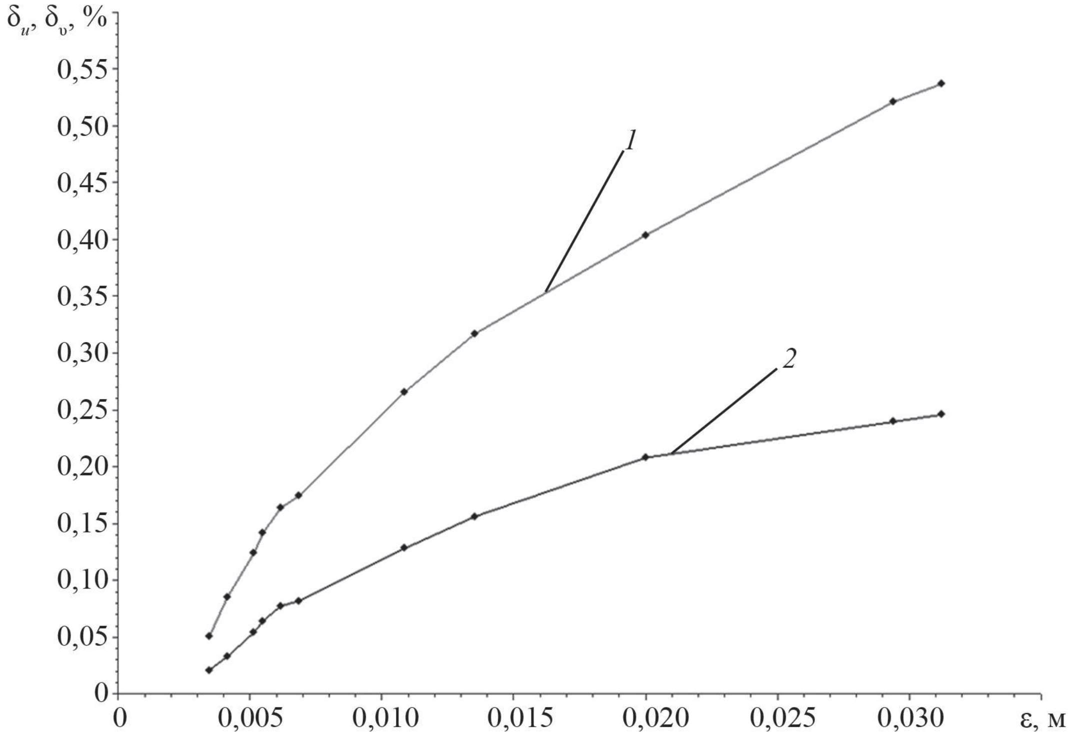

Рис. 2. Графики зависимости относительной погрешности от радиуса стержней ε при λ = 200 Вт/(м·K):
1 — гомогенизированная задача; *2* — дискретная задача

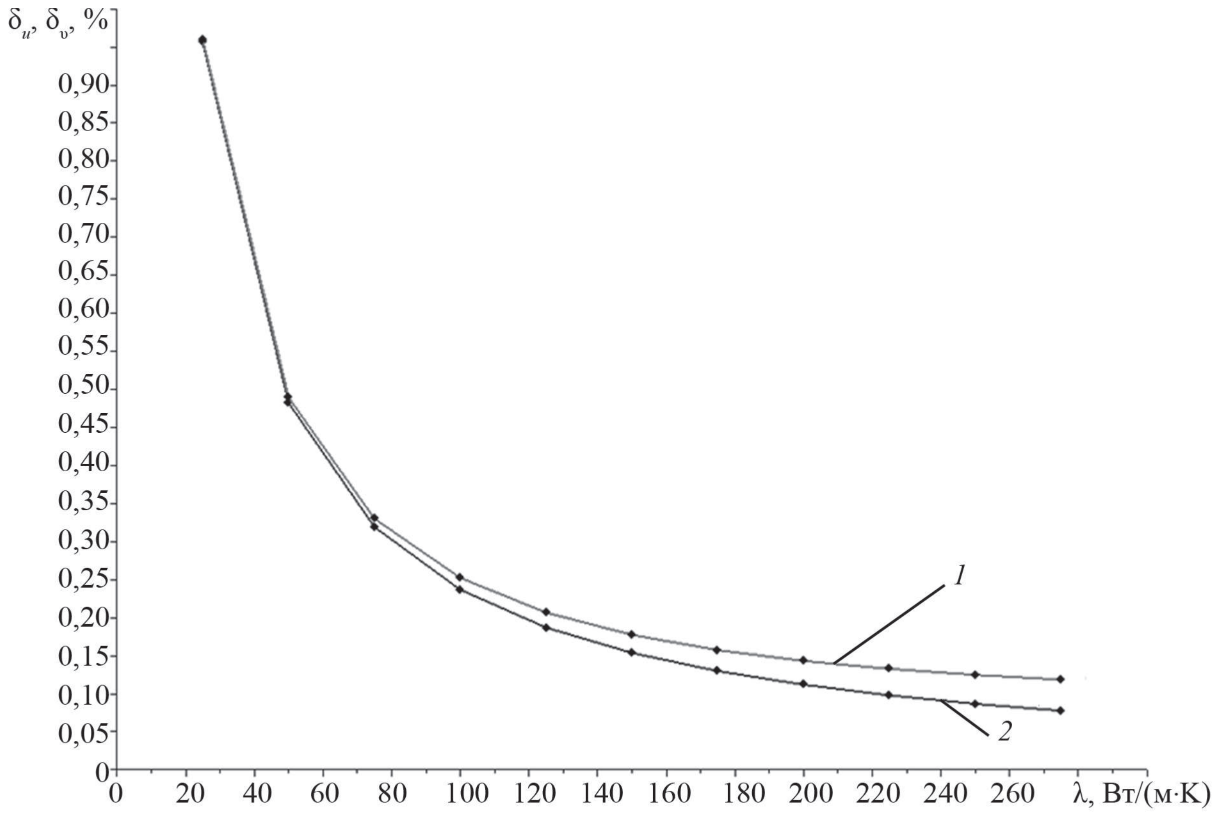

Рис. 3. Графики зависимости относительной погрешности от коэффициента теплопроводности λ при ε ≈ 0,01 м:
1 — гомогенизированная задача; *2* — дискретная задача

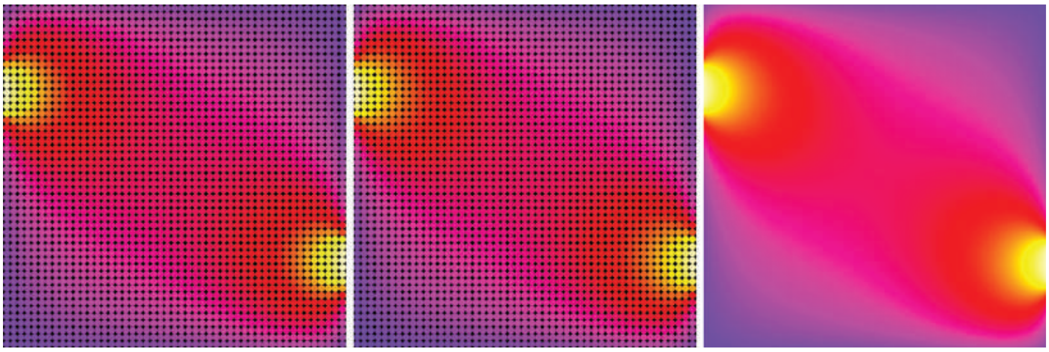

Рис. 4. Точное решение, решения дискретной и гомогенизированной задач при λ = 275 Вт/(м·K)

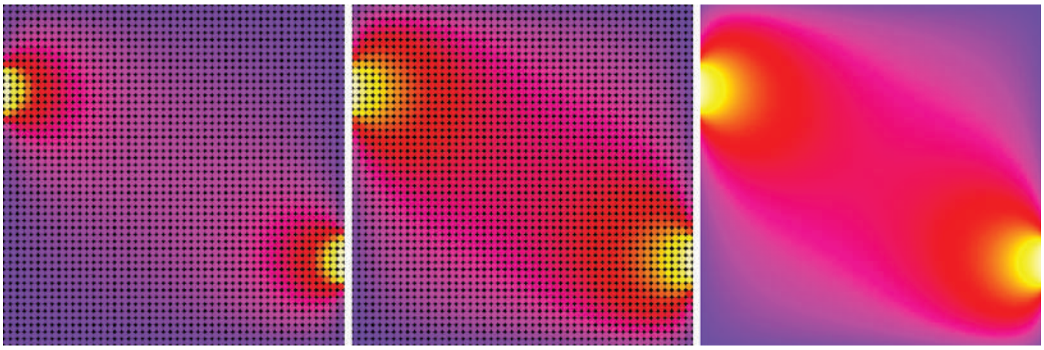

Рис. 5. Точное решение, решения дискретной и гомогенизированной задач при λ = 0,1 Вт/(м·K)

Распределение полученных значений температуры показано с помощью термограмм, где переход от максимальной температуры к минимальной соответствует цветовому переходу белый–желтый–красный–синий–черный.

На рис. 4, 5 представлены термограммы для случая $\varepsilon \approx 0{,}1$ м при значениях коэффициента теплопроводности λ = 275 и 0,1 Вт/(м·K). В случае λ = 275 Вт/(м·K) приближенные методы дают хорошие приближения к точному решению, в то время как при λ = 0,1 Вт/(м·K) они практически непригодны.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №14-11-00306).

Литература

1. **Амосов А.А.** Полудискретные и асимптотические приближения к решению задачи переноса тепла в системе экранов при наличии излучения // Современные проблемы математического моделирования: Сб. трудов XII Всеросс. школы-семинара. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2007. С. 21—36.

2. **Амосов А.А., Гулин В.В.** Полудискретные и асимптотические аппроксимации задачи переноса тепла в системе серых экранов при наличии излучения // Вестник МЭИ. 2008. № 6. С. 5—15.

3. **Amosov A.A.** Semidiscrete and Asymptotic Approximations for the Nonstationary Radiative-conductive Heat Transfer Problem in a Periodic System of Grey Heat Shields // J. Math. Sci. 2011. V. 176. Iss. 3. Pp. 361—408.

4. **Кремкова А.А.** Полудискретные и асимптотические аппроксимации задачи радиацинно-кондуктивного теплообмена в двумерной периодической структуре // Вестник МЭИ. 2012. № 6. С. 151—161.

5. **Амосов А.А., Кремкова А.А.** Оценка погрешности полудискретного метода решения задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в двумерной периодической структуре // Вестник МЭИ. 2013. № 6. С. 22—36.

6. **Амосов А.А., Маслов Д.А.** Полудискретные и асимптотические аппроксимации стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в двумерной системе пластин // Вестник МЭИ. 2015. № 3. С. 120—127.

7. **Amosov A.A., Maslov D.A.** Semidiscrete Approximations for the Stationary Radiative-conductive Heat Transfer Problem in a Two-dimensional System of Plates // Russian J. Numerical Analysis and Math. Modelling. 2016. V. 31. Iss. 1. Pp. 1—16.

8. **Зигель Р., Хауэлл Дж.** Теплообмен излучением. М.: Изд-во Мир, 1975.

References

1. **Amosov A.A.** Poludiskretnye i Asimptoticheskie Priblizheniya k Resheniyu Zadachi Perenosa Tepla v Sisteme Ekranov pri Nalichii Izlucheniya. Sovremennye Problemy Matematicheskogo Modelirovaniya: Sb. Trudov XII Vseross. Shkoly-seminara. Rostov-na-Donu: Izd-vo RGU, 2007:21—36. (in Russian).

2. **Amosov A.A., Gulin V.V.** Poludiskretnye i Asimptoticheskie Approksimatsii Zadachi Perenosa Tepla

v Sisteme Seryh Ekranov pri Nalichii Izlucheniya. Vestnik MPEI. 2008;6:5—15. (in Russian).

3. **Amosov A.A.** Semidiscrete and Asymptotic Approximations for the Nonstationary Radiative-conductive Heat Transfer Problem in a Periodic System of Grey Heat Shields. J. Math. Sci. 2011;176;3:361—408.

4. **Kremkova A.A.** Poludiskretnye i Asimptoticheskie Approksimatsii Zadachi Radiatsinno-konduktivnogo Teploobmena v Dvumernoy Periodicheskoy Strukture. Vestnik MPEI. 2012;6:151—161. (in Russian).

5. **Amosov A.A., Kremkova A.A.** Otsenka Pogreshnosti Poludiskretnogo Metoda Resheniya Zadachi Radiatsionno-konduktivnogo Teploobmena v Dvumernoy Periodicheskoy Strukture. Vestnik MPEI. 2013;6:22—36. (in Russian).

6. **Amosov A.A., Maslov D.A.** Poludiskretnye i Asimptoticheskie Approksimatsii Statsionarnoy Zadachi Radiatsionno-Konduktivnogo Teploobmena v Dvumernoy Sisteme Plastin. Vestnik MPEI. 2015;3:120—127. (in Russian).

7. **Amosov A.A., Maslov D.A.** Semidiscrete Approximations for the Stationary Radiative-conductive Heat Transfer Problem in a Two-dimensional System of Plates. Russian J. Numerical Analysis and Math.Modelling. 2016;31;1:1—16.

8. **Zigel' R., Hauell Dzh.** Teploobmen Izlucheniem. M.: Izd-vo Mir, 1975. (in Russian).

Сведения об авторах

Амосов Андрей Авенирович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: AmosovAA@mpei.ru

Крымов Никита Евгеньевич — студент НИУ «МЭИ», e-mail: hortmund@gmail.com

Information about authors

Amosov Andrey A. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: AmosovAA@mpei.ru

Krymov Nikita E. — Student, NRU MPEI, e-mail: hortmund@gmail.com

Статья поступила в редакцию 14.03.2017